Guía N°3 (M2)

<< Ecuaciones Lineales >>

NOMBRE: ____

I. Introducción

Las **expresiones algebraicas** son combinaciones de números, variables y operaciones matemáticas, como la suma, resta, multiplicación y división. Se representan mediante símbolos y letras, donde los números se consideran constantes y las letras representan variables, es decir, valores que pueden variar.

Producto Notable	**Fórmula**
Binomio al cuadrado	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Binomio al cubo	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Producto de binomios con término común (caso simple)	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
Producto de binomios con término común (caso general)	$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Factorización	**Fórmula General**
Factor Común	$ab + ac = a(b+c)$
Agrupación	$ab + ac + db + dc = (a+d)(b+c)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Trinomio $x^2 + bx + c$	$x^2 + (m+n)x + mn = (x+m)(x+n)$
Trinomio $ax^2 + bx + c$	$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$
Factor Por Signo	$-a - b = -(a+b)$

II. Ecuación Lineal

Una **ecuación** es una igualdad en la que aparece una variable que se hace válida para un único valor numérico.

Cualquier ecuación que pueda ser expresada de la forma $ax + b = 0$, donde a es no nulo y "x" es la incógnita, o el valor a encontrar, se llamará ecuación lineal o de primer grado.

Ecuación Lineal

La raíz o solución es el valor de la variable que hace que la igualdad sea verdadera. En el caso de ser más soluciones se le denomina raíces o conjunto solución. La ecuación lineal o de primer grado tenemos tres casos para x:

1. Solución única
2. Infinitas soluciones
3. Sin solución

Para resolver la ecuación lineal de la forma $ax + b = 0$, se debe aislar la incógnita de la forma $x = \dfrac{-b}{a}$.

Ecuación con Solución Única

$$
\begin{aligned}
\text{Ecuación:}\quad & 2x + 1 = 3 \\
\text{Paso 1:}\quad & \text{Restar 1 a ambos lados para aislar } 2x. \\
& 2x + 1 - 1 = 3 - 1 \\
& 2x = 2 \\
\text{Paso 2:}\quad & \text{Dividir ambos lados entre 2 para despejar } x. \\
& \frac{2x}{2} = \frac{2}{2} \\
& x = 1 \\
\text{Solución:}\quad & \boxed{x = 1} \\
\text{Verificación:}\quad & \text{Sustituimos } x = 1 \text{ en la ecuación original:} \\
& 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3
\end{aligned}
$$

Ecuación con Infinitas Soluciones

Ecuación: $\dfrac{x-3}{3-x} = -1$

Paso 1: Simplificar el denominador $(3-x)$ como $-(x-3)$:

$\dfrac{x-3}{-(x-3)} = -1$

Paso 2: Simplificar la fracción:

$-1 = -1$ (siempre que $x \neq 3$)

Conclusión: La igualdad se cumple para $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}}$.

Explicación: Al simplificar, obtenemos una identidad verdadera independiente de x.

El único valor excluido es $x = 3$ (hace el denominador cero).

Ecuación Sin Solución

Ecuación: $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x^2-4}$

Paso 1: Factorizar el denominador del lado derecho:

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

Por lo tanto, la ecuación queda:

$\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$

Paso 2: Multiplicar ambos lados por el MCD $(x-2)(x+2)$ para eliminar denominadores:

$(x+2) - (x-2) = 1$

Paso 3: Simplificar:

$x + 2 - x + 2 = 1$

$4 = 1$ (¡Contradicción!)

Conclusión: $\boxed{\text{No existe solución real para la ecuación.}}$

Explicación: Al desarrollar la ecuación, se obtiene una contradicción (4=1).

Además, los valores $x = 2$ y $x = -2$ harían indefinida la ecuación.

Metodología para Resolver Problemas de Ecuaciones Lineales

Paso 1. Comprender el enunciado: Leer cuidadosamente el problema, tantas veces como sea necesario, hasta comprenderlo bien.

Paso 2. Designar la(s) incógnita(s): Identificar los valores desconocidos del problema y representarlos con variables (generalmente letras), donde frecuentemente la propia pregunta sugiere la notación.

Paso 3. Codificar: Traducir las relaciones expresadas verbalmente al lenguaje matemático, utilizando ecuaciones o expresiones algebraicas.

Paso 4. Plantear y resolver ecuación: Establecer y resolver la(s) ecuación(es) que represente(n) las condiciones del problema.

Paso 5. Analizar las soluciones: Verificar que la(s) solución(es) obtenida(s) satisfacen las condiciones iniciales del problema.

Ejemplo de Números

Problema:

La suma de tres números consecutivos es 204. ¿Cuáles son estos números?

Solución:

Si definimos x como el número menor, los otros números serán $(x+1)$ y $(x+2)$.

$$\begin{aligned} x + (x+1) + (x+2) &= 204 \\ 3x + 3 &= 204 \\ 3x &= 201 \\ x &= 67 \end{aligned}$$

Ahora sabemos que $x = 67$, por lo tanto, los números solicitados son $\boxed{67, 68, 69}$.

Ejemplo de Sistema Decimal

Problema

Las dos cifras de un número son consecutivas. La mayor es la de las decenas y la menor la de las unidades. Si el número es igual a seis veces la suma de sus cifras, ¿cuál es el número?

Solución

Paso 1: Definiciones y ecuaciones iniciales

Datos	**Interpretación Matemática**
a: cifra de unidades	Número se expresa como $10b + a$
b: cifra de decenas ($b > a$)	Relación consecutiva: $b = a + 1 \quad (1)$
Número = 6 $\times$ suma de cifras	$10b + a = 6(a + b) \quad (2)$

Paso 2: Sustituir (1) en (2)

$$\begin{aligned}
10b + a &= 6(a + b) \\
10(a + 1) + a &= 6(a + (a + 1)) \quad \text{(Sustituyendo } b = a + 1\text{)} \\
10a + 10 + a &= 6(2a + 1) \\
11a + 10 &= 12a + 6 \\
10 - 6 &= 12a - 11a \\
4 &= a \quad (3)
\end{aligned}$$

Paso 3: Calcular b y el número

$$\begin{gathered}
b = a + 1 = 4 + 1 = 5, \\
\text{Número} = 10 \cdot b + a = 10 \cdot 5 + 4 = \boxed{54}.
\end{gathered}$$

Respuesta

El número buscado es $\boxed{54}$.

Ejemplo de Edades

Problema

Sonia es 10 años mayor que su hermana Berta, y el próximo año tendrá el doble de la edad que tendrá Berta. ¿Cuáles son sus edades actuales?

Solución

Paso 1: Definir variables y ecuaciones

Datos	**Interpretación Matemática**
Sonia es 10 años mayor que Berta	$S = B + 10 \quad (1)$
Próximo año: Sonia tendrá el doble que Berta	$2(B + 1) = S + 1 \quad (2)$

Paso 2: Sustituir (1) en (2)

$$\begin{aligned}
2(B + 1) &= S + 1 \\
2(B + 1) &= (B + 10) + 1 \quad \text{(Sustituyendo } S \text{ de (1))} \\
2B + 2 &= B + 11 \\
2B - B &= 11 - 2 \\
B &= 9 \quad (3)
\end{aligned}$$

Paso 3: Calcular la edad de Sonia

$$\begin{aligned}
S &= B + 10 \\
S &= 9 + 10 \\
S &= 19
\end{aligned}$$

Respuesta Final

Las edades actuales son:

- Sonia: $\boxed{\text{19 años}}$
- Berta: $\boxed{\text{9 años}}$

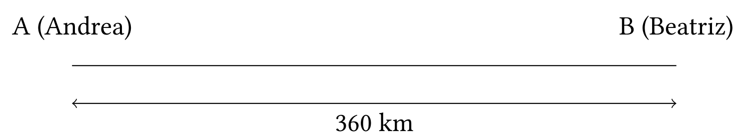
Ejemplo de Móviles

Problema

Andrea está en la ciudad A y Beatriz en la ciudad B, unidas por un camino recto de 360 km. Ambas empiezan a conducir al mismo tiempo, una hacia la otra. Si Andrea viaja a 40 km/h y Beatriz a 50 km/h, ¿cuándo se encontrarán?

Solución

Paso 1: Representación gráfica



Paso 2: Relaciones fundamentales

Sabemos que:

- $d_{\text{Andrea}} + d_{\text{Beatriz}} = 360$ km (la suma de distancias recorridas)
- $d = v \cdot t$ (fórmula de distancia)

Paso 3: Plantear ecuaciones

$$\begin{aligned} d_A + d_B &= 360 \\ v_A \cdot t + v_B \cdot t &= 360 \\ 40t + 50t &= 360 \\ 90t &= 360 \\ t &= \frac{360}{90} \\ t &= 4 \text{ horas} \end{aligned}$$

Respuesta

Las conductoras se encontrarán después de $\boxed{\text{4 horas}}$ de haber comenzado su viaje.

Ejemplo de Tasas de Trabajo

Problema

Claudia puede alfombrar una casa en 6 horas y su hermano Javier puede hacer el mismo trabajo en 9 horas. ¿Cuánto tardarán, trabajando juntos, en alfombrar la casa?

Solución

Paso 1: Definir tasas individuales

Datos	**Interpretación Matemática**
Claudia: 6 horas por casa	Tasa de trabajo: $\frac{1}{6}$ casas/hora
Javier: 9 horas por casa	Tasa de trabajo: $\frac{1}{9}$ casas/hora
Trabajo conjunto	Tasa combinada: $\frac{1}{t}$ casas/hora

Paso 2: Plantear ecuación

La suma de tasas individuales es igual a la tasa conjunta:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1}{t}$$

Paso 3: Resolver la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} + \frac{1}{9} &= \frac{1}{t} \\
\frac{3}{18} + \frac{2}{18} &= \frac{1}{t} \quad \text{(MCD = 18)} \\
\frac{5}{18} &= \frac{1}{t} \\
5t &= 18 \\
t &= \frac{18}{5} \text{ horas} \\
t &= 3.6 \text{ horas} \\
&= 3 \text{ horas y } 0.6 \times 60 \text{ minutos} \\
&= \boxed{3 \text{ horas y } 36 \text{ minutos}}
\end{aligned}$$

Respuesta Final

Trabajando juntos, Claudia y Javier alfombrarán la casa en $\boxed{3 \text{ horas y } 36 \text{ minutos}}$.

III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones es(son) de primer grado?

I) $x^2 + 3x + 5 = x^2 - 1$
II) $\sqrt{2}x - 3 = 3\sqrt{x}$
III) $x + \dfrac{3}{5} = 0$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) I, II y III

2) En la ecuación $\frac{2}{3}x - 3x + \frac{2}{5} = -2x + \frac{31}{15}$, el valor del opuesto de x es

a) -5
b) -1
c) $\dfrac{-5}{13}$
d) 2
e) 5

3) Si $2x + 1 = x - 5$, entonces $x^2 + 1$ es

a) -35
b) 37
c) -11
d) -6
e) -5

4) El valor de x en la ecuación $-\{3 - [3 - (3x - 2)] + 5\} = 12 - 4x$ es

a) 15
b) 12
c) 9
d) 6
e) 5

5) El valor de x en la ecuación $0,1x + 0,5x - 0,25 = 0,75$ es

a) $0,\overline{3}$
b) $1,\overline{6}$
c) $1,\overline{3}$
d) $0,\overline{6}$
e) $1,6$

6) Para que el valor de b en la ecuación $a + 2b = 10$ sea igual al opuesto de -3, el valor del inverso aditivo de a debe ser

a) -16
b) -4
c) -8
d) 4
e) 16

7) El valor de x en la ecuación $\frac{2x}{5} - \frac{3x}{4} + \frac{x}{10} = \frac{-1}{4}$, es

a) -1
b) -5
c) 0
d) 1
e) 10

8) Si $\dfrac{3t+1}{2}=5$, entonces $2t+1$, es igual a

a) $8,\overline{3}$
b) 13
c) 7
d) 6
e) 3

9) Si $7.5x = 75$ y $2.5 \cdot 100 = w$, entonces $w \cdot x^{-1}$ es igual a

a) 2.5
b) 25
c) 250
d) 2500
e) Ninguno de los valores anteriores.

10) ¿Cuál(es) de las siguiente(s) ecuaciones es(son) reductibles a una ecuación de primer grado?

I) $2(x+3)^2 - 4x = 2x^2 + 4$
II) $(x-a)(x+a) = x(x-a)$
III) $(x-2)^3 + 2x = x^3 + 6x^2 + 1$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) I, II y III

IV. Ejercicios tipo PAES

11) Para $x \neq 0$ la solución de la ecuación $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2x}=\dfrac{1}{3x}+\dfrac{13}{12}$ es

a) 2
b) $\dfrac{8}{5}$
c) 1
d) $-\dfrac{6}{23}$
e) La ecuación tiene más de una solución.

12) Al resolver la ecuación $0.5x - 0.7 + 0.3x - 1.5 = 0.6x - 4 + 1.7x$ se obtiene que el opuesto de x es

a) $1,2$
b) $-1,2$
c) $0,8\overline{3}$
d) $-0,8\overline{3}$
e) -1

13) Si $x \neq 5$ y $x \neq \dfrac{3}{2}$ al resolver $\dfrac{1}{2(x-5)}+\dfrac{3}{4(3-2x)}=0$, se obtiene que x es igual a

a) 0
b) $0,25$
c) -9
d) 1
e) 3

14) Si P el conjunto de los números primos, ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones tiene(n) solución única en P?

I) $5 - 2x = x + 2$
II) $-12 + 2x - x = -3x - 4$
III) $17x - x + 9 = 32 - 19x + 82$

a) Solo II
b) Solo I y II
c) Solo II y III
d) I, II y III
e) Ninguna de las ecuaciones tiene solución en P.

15) Siendo $x \neq 1$ y $x \neq -3$ se tiene que la expresión algebraica $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{x+3}$ es igual al antecesor de la unidad, entonces el sucesor de x es

a) 10
b) 9
c) 8
d) 5
e) La solución no corresponde a un número entero.

16) Para $a \neq -1$ se tiene que la solución, para x, de la ecuación literal $a(x+1) = a(a+1) - x$ es

a) $a^2 + 2a + 1$
b) $\dfrac{1}{a+1}$
c) $\dfrac{a^2}{a-1}$
d) $\dfrac{a^2}{a+1}$
e) $\dfrac{a^2+a-1}{a+1}$

17) El conjunto solución de la ecuación $\dfrac{2(2-x)}{x-1} + \dfrac{3-x}{x+1} = -3 + \dfrac{8}{1-x^2}$ es

a) $\{1\}$
b) $\{-1, 1\}$
c) $R - \{-1, 1\}$
d) R
e) $\emptyset$

18) Si se tiene la ecuación para x, $mx - 2p = 2px - m$ con m y p números reales, entonces de acuerdo a ella, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $m \neq 2p$, entonces su única solución es $x = -1$
II) Si $\dfrac{m}{2} = p$, entonces la ecuación es una identidad que se verifica para todo x
III) Si $x = -1$, entonces la igualdad es una identidad que se cumple para todo m y p

a) Solo I y II
b) Solo I y III
c) Solo II y III
d) I, II y III
e) Ninguna de ellas.

19) Un concurso de televisión, en que participan solo equipos de dos personas, consiste en llenar un vaso con cucharadas de agua que se deben trasladar desde un barril. Si en un equipo participan los primos Aldo y Lorena, se puede determinar cuánto tardaría Aldo si tuviera que concursar solo, si se sabe que :

(1) Lorena sola tarda 8 minutos en llenar el vaso.
(2) Aldo y Lorena juntos llenan el vaso en 6 minutos.

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

20) Se puede calcular el valor de x en la ecuación $ax - b = cx$, con a, b y c números reales, si:

(1) Se conocen los valores de a, b y c.
(2) $a < c$.

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional