



# Guía N°5 (M2)

## << Proporcionalidad >>

NOMBRE: \_\_\_\_\_

### I. Introducción

Las **expresiones algebraicas** son combinaciones de números, variables y operaciones matemáticas, como la suma, resta, multiplicación y división. Se representan mediante símbolos y letras, donde los números se consideran constantes y las letras representan variables, es decir, valores que pueden variar.

Producto Notable	Fórmula
Binomio al cuadrado	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Binomio al cubo	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Producto de binomios con término común (caso simple)	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Producto de binomios con término común (caso general)	$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Factorización	Fórmula General
Factor Común	$ab + ac = a(b + c)$
Agrupación	$ab + ac + db + dc = (a + d)(b + c)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Trinomio $x^2 + bx + c$	$x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n)$
Trinomio $ax^2 + bx + c$	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
Factor Por Signo	$-a - b = -(a + b)$

### II. Razones y Proporciones

#### Razones

Una razón es el cociente entre dos reales. Una razón es similar a un racional, por tanto, se pueden amplificar o simplificar.

$$\frac{a}{b} = a : b \quad \text{se lee } a \text{ es a } b.$$

#### Ejemplo en un Cine

Si en un cine hay 800 adultos y 400 niños, entonces podemos escribir:

$$\frac{\text{Adultos}}{\text{Niños}} = \frac{800}{400} = \frac{2}{1}$$

- Por cada **2 adultos** hay **1 niño**
- Las razones deben simplificarse completamente
- Especificar siempre el orden de comparación
- Normalmente se escribe primero la cantidad menor:

$$\frac{\text{Niños}}{\text{Adultos}} = \frac{1}{2} \quad (1:2)$$

#### Proporciones

Una Proporción es una igualdad entre dos o más razones. También se escribe como  $a : b = c : d$ , de esta forma de escribir es que  $a$  y  $d$  se llaman extremos,  $b$  y  $c$  se llaman medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a : b = c : d \quad \text{se lee } a \text{ es a } b \text{ como } c \text{ es a } d.$$

#### Ejemplo de libros

Si 5 libros cuestan \$100, ¿cuánto cuestan 8 libros?

## Resolución Paso a Paso

1. Establecer la proporción:

$$\frac{5 \text{ libras}}{\$100} = \frac{8 \text{ libras}}{x}$$

2. Aplicar la regla de tres (producto cruzado):

$$5 \times x = 8 \times 100$$

3. Despejar  $x$ :

$$x = \frac{8 \times 100}{5}$$

4. Calcular:

$$x = \frac{800}{5} = \$160$$

## Proporcionalidad Directa

Dos cantidades  $x$  e  $y$  son **directamente proporcionales** cuando:

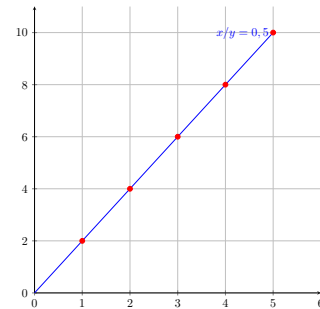
$$\frac{x}{y} = k \quad (\text{constante})$$

o equivalentemente:

$$x = ky$$

- La gráfica es una **recta** que pasa por el origen  $(0, 0)$
- Si  $x$  aumenta,  $y$  aumenta en la misma proporción

$x$	$y$	$x/y = k$
1	2	0,5
2	4	0,5
3	6	0,5
4	8	0,5
5	10	0,5



## Ejemplo

Si 3 kg de manzanas cuestan \$750, ¿cuánto costarán 5 kg?

### Paso 1: Identificar la proporcionalidad

Como el precio es directamente proporcional al peso:

$$\frac{\text{Peso}_1}{\text{Precio}_1} = \frac{\text{Peso}_2}{\text{Precio}_2}$$

### Paso 2: Plantear la proporción

$$\frac{3}{750} = \frac{5}{x}$$

### Paso 3: Resolver para $x$

$$\begin{aligned} 3x &= 750 \times 5 \\ x &= \frac{750 \times 5}{3} \\ x &= \frac{3750}{3} \\ x &= \$1250 \end{aligned}$$

## Proporcionalidad Inversa

Dos cantidades  $x$  e  $y$  son **inversamente proporcionales** cuando:

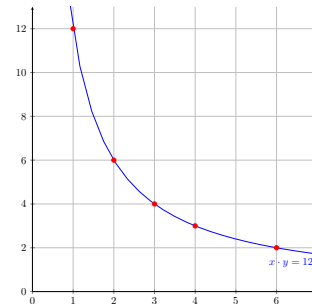
$$x \cdot y = k \quad (\text{constante})$$

o equivalentemente:

$$x = \frac{k}{y}$$

- La gráfica es una **curva** que no pasa por el origen  $(0, 0)$
- Si  $x$  aumenta,  $y$  disminuye en la misma proporción

$x$	$y$	$x \cdot y = k$
1	12	12
2	6	12
3	4	12
4	3	12
6	2	12



## Ejemplo

Si 6 obreros construyen una muralla en 3 días, ¿cuánto demorarán 9 obreros en construir la misma muralla?

### Paso 1: Identificar la proporcionalidad

Como más obreros tardarán menos tiempo, la relación es **inversamente proporcional**:

$$\text{Obreros} \times \text{Días} = \text{Constante}$$

### Paso 2: Plantear la ecuación

$$6 \times 3 = 9 \times x$$

### Paso 3: Resolver para $x$

$$18 = 9x$$

$$x = \frac{18}{9}$$

$$x = 2 \text{ días}$$

## Proporcionalidad Compuesta

La **proporcionalidad compuesta** relaciona tres o más magnitudes donde:

- Se expresa como  $a : b : c = m : n : p$
- Cada término está relacionado por una constante  $k$ :

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = k$$

## Ejemplo Práctico

Si 5 obreros trabajando 8 horas diarias construyen un muro en 3 días, ¿cuántos días tardarán 7 obreros trabajando 6 horas diarias?

### Paso 1: Organizar datos

Obreros	Horas/día	Días
5	8	3
7	6	$x$

### Paso 3: Plantear ecuación

$$5 \cdot 8 \cdot 3 = 7 \cdot 6 \cdot x$$

### Paso 4: Resolver

$$x = \frac{5 \times 8 \times 3}{7 \times 6}$$

$$x = \frac{120}{42} \approx 2.86 \text{ días}$$

### Paso 2: Relacionar magnitudes

- Más obreros  $\Rightarrow$  menos días (inversa)
- Menos horas/día  $\Rightarrow$  más días (inversa)

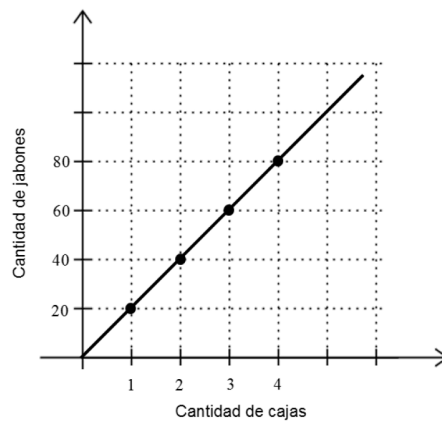
## Ejercicio Adicional

Si 4 máquinas trabajando 5 horas producen 200 piezas, ¿cuántas piezas producirán 6 máquinas trabajando 8 horas?

$$4 \cdot 5 \cdot x = 6 \cdot 8 \cdot 200 \implies x = \boxed{480}$$

### III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) En una tienda de perfumería empaican jabones en cajas. En la figura adjunta se representa la relación entre la cantidad de jabones y la cantidad de cajas que se necesitan para empaicar dicha cantidad de jabones.



Si esta relación se puede modelar mediante la función  $f$  definida por  $f(x) = 20 \cdot x$ , ¿qué representa el número 20? [PAES M1 Regular 2024]

- a) La constante de proporcionalidad directa.
- b) La constante de proporcionalidad inversa.
- c) La cantidad total de jabones.
- d) La cantidad total de cajas.

2) En la tabla adjunta se indica la temperatura que alcanza cierto líquido en determinado tiempo, a partir de los 0 °C.

Temperatura (°C)	Tiempo (min)
100	8
50	4

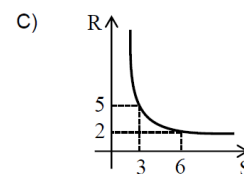
Si la temperatura alcanzada por el líquido es directamente proporcional al tiempo que ha sido calentado, en ese orden, ¿cuál es la constante de proporcionalidad? [PAES M1 Regular 2024]

- a)  $\frac{2}{25}$
- b)  $\frac{25}{2}$
- c) 50
- d) 400

3) ¿En cuál de las siguientes representaciones las variables son inversamente proporcionales? [PAES M1 Regular 2024]

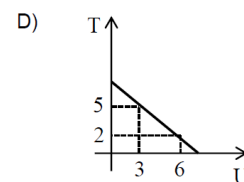
A)

M	N
5	8
10	4
20	2

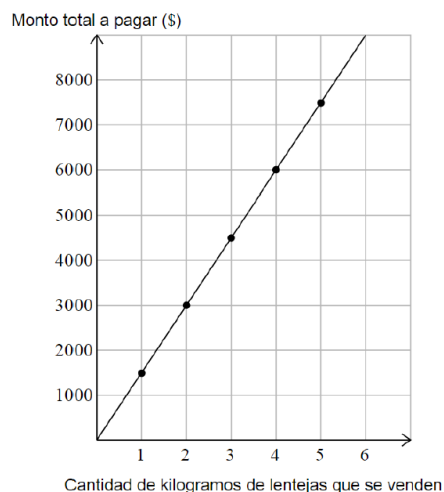


B)

P	Q
5	10
10	9
20	8



4) Considera el siguiente gráfico en el que se presenta un modelo para la relación entre la cantidad de kilogramos de lentejas que se venden a granel en un almacén y su monto total a pagar.



¿Cuántos kilogramos de lentejas compró en total una persona que pagó \$3300? [PAES M1 Regular 2024]

- a) 2 kg
- b) 2, 2 kg
- c) 2, 3 kg
- d) 2, 5 kg

5) Bajo ciertas condiciones, la cantidad de kilómetros recorridos por un automóvil es directamente proporcional a la cantidad de litros de combustible que consume.

Si un automóvil que cumple estas condiciones recorre 90 kilómetros con 15 litros de bencina, ¿cuántos kilómetros puede recorrer este automóvil con 25 litros de bencina? [PAES M1 Regular 2024]

- a) 54
- b) 60
- c) 135
- d) 150

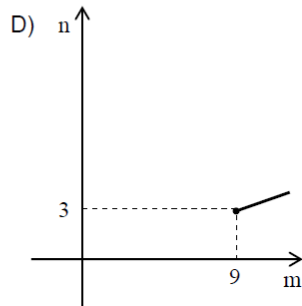
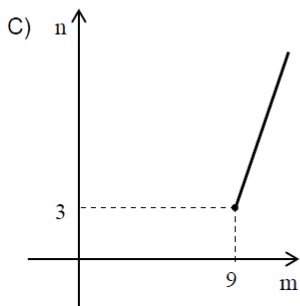
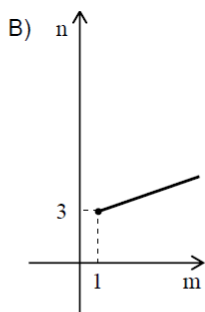
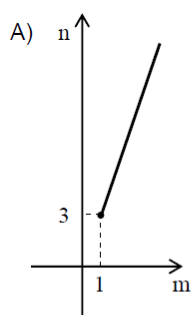
6) En una carrera se reparte un total de 12 000 dólares a las primeras cuatro personas que lleguen a la meta. Este reparto se realiza a razón de 6 : 3 : 2 : 1 de modo que mientras mejor haya sido la posición de llegada, más dinero se gana. ¿Cuál es la cantidad que le corresponde a la persona que llegó en segundo lugar? [PAES M1 Regular 2024]

- a) 2000 dólares
- b) 3000 dólares
- c) 4000 dólares
- d) 6000 dólares

7) Un comerciante compra una cantidad de naranjas a razón de 3 kilogramos por \$600 y las vende todas a razón de 4 kilogramos por \$1000 . Si obtuvo una ganancia de \$3000 , ¿cuántos kilogramos de naranjas compró? [PAES M1 Regular 2023]

- a) 8
- b) 12
- c) 25
- d) 60

8) Considera las variables directamente proporcionales  $m$  y  $n$ , con  $n \geq 3$ . Cuando  $m = 121$  se tiene que  $n = 363$ . ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor la relación entre  $m$  y  $n$ ? [PAES M1 Regular 2023]



9) Los cajones M y S pesan juntos K kilogramos. Si la razón entre los pesos de M y S es 3 : 4, entonces  $S : K =$  [PSU 2005]

- a) 4 : 7
- b) 4 : 3
- c) 7 : 4
- d) 3 : 7
- e) 3 : 4

10) En una quinta hay naranjos, manzanos y duraznos que suman en total 300 árboles. Si hay 120 naranjos y la razón entre los duraznos y manzanos es 7 : 3, entonces ¿cuántos duraznos hay en la quinta? [PSU 2005]

- a) 54
- b) 77
- c) 84
- d) 126
- e) 210

#### IV. Ejercicios tipo PAES

11) Si 15 obreros construyen un edificio en 8 meses, ¿cuánto tiempo se demorarían 10 obreros en construir un edificio similar, trabajando el mismo número de horas al día y en igualdad de condiciones de trabajo?

- a) 4,8 meses
- b) 6 meses
- c) 9 meses
- d) 10 meses
- e) 12 meses

12) La razón entre el contenido de un estanque y su capacidad es 2 : 3. Si para llenarlo faltan 15 litros, entonces ¿cuál es la capacidad del estanque?

- a) 15 litros
- b) 20 litros
- c) 25 litros
- d) 30 litros
- e) 45 litros

13) Sean  $a$  y  $b$  números positivos. Se puede determinar en que razón están las cantidades  $a$  y  $b$ , si:

- (1) El doble de  $a$  es equivalente al triple de  $b$ .
- (2) La diferencia entre  $a$  y  $b$  es 10.

- a) (1) por sí sola
- b) (2) por sí sola
- c) Ambas juntas, (1) y (2)
- d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
- e) Se requiere información adicional

14) A un grupo de estudiantes compuesto por hombres y mujeres que están en la razón 5 : 7, respectivamente, se les hace una encuesta preguntándoles si les gusta o no la asignatura de matemática. Se puede determinar el número de mujeres que les gusta matemática, si se conoce:

- (1) La razón entre los que le gusta matemática y los que no les gusta es 1 : 1.
- (2) Los estudiantes encuestados son 300.

- a) (1) por sí sola
- b) (2) por sí sola
- c) Ambas juntas, (1) y (2)
- d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
- e) Se requiere información adicional

15) Si  $3m$  kilos de arroz valen \$  $p$ , entonces  $\frac{3}{4}$  kilos valdrán

- a) \$  $\frac{9p}{4m}$
- b) \$  $\frac{p}{4m}$
- c) \$  $\frac{4m}{p}$
- d) \$  $\frac{p}{m}$
- e) \$  $4mp$

16) ¿Cuál(es) de las siguientes tablas corresponde(n) a dos variables inversamente proporcionales?

I)

x	y
2	36
3	24
4	18
6	12

II)

x	y
3	6
4	8
7	10
9	12

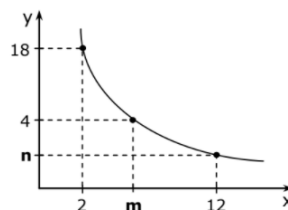
III)

x	y
40	1
20	2
10	4
5	8

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) Solo I y II
- d) Solo I y III
- e) Solo II y III

17) Las variables  $x$  e  $y$  de la figura adjunta, son inversamente proporcionales, entonces  $3m - 2n$  es igual a

- a) 10, 5
- b) 14, 0
- c) 17, 5
- d) 21, 0
- e) 42, 0



18) Las cantidades  $a^2$  y  $b$  son inversamente proporcionales. Si para  $a = 2$ , se obtiene  $b = 3$ , ¿cuál sería el valor de  $a$  asociado a  $b = 27$ ?

- a)  $\frac{4}{9}$
- b)  $\frac{1}{2}$
- c)  $\frac{2}{3}$
- d)  $\frac{3}{4}$
- e)  $\frac{3}{2}$

19) Si  $A : B = 5 : 3$  y  $A - B = 8$ , entonces  $A \cdot B$  es igual a

- a) 120
- b) 150
- c) 210
- d) 180
- e) 240

20) Si  $a : b = 3 : 4$  y  $c : b = 1 : 3$ , entonces  $c : b : a =$

- a) 4 : 12 : 9
- b) 1 : 3 : 4
- c) 2 : 6 : 9
- d) 3 : 4 : 1
- e) 4 : 9 : 3