Guía N°8 (M2)

<< Ecuación Cuadrática >>

NOMBRE: ____

I. Introducción

Las **expresiones algebraicas** son combinaciones de números, variables y operaciones matemáticas, como la suma, resta, multiplicación y división. Se representan mediante símbolos y letras, donde los números se consideran constantes y las letras representan variables, es decir, valores que pueden variar.

Producto Notable	**Fórmula**
Binomio al cuadrado	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Binomio al cubo	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Producto de binomios con término común (caso simple)	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
Producto de binomios con término común (caso general)	$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Factorización	**Fórmula General**
Factor Común	$ab + ac = a(b+c)$
Agrupación	$ab + ac + db + dc = (a+d)(b+c)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Trinomio $x^2 + bx + c$	$x^2 + (m+n)x + mn = (x+m)(x+n)$
Trinomio $ax^2 + bx + c$	$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$
Factor Por Signo	$-a - b = -(a+b)$

II. Ecuación Cuadrática

Introducción

Recordemos que la ecuación general de una ecuación cuadrática es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se debe determinar el valor o los valores que satisfacen la ecuación.

Tipos de Ecuaciones Cuadráticas

- Ecuaciones Incompletas
- Ecuaciones Completas

Ecuaciones Incompletas

Caso 1: Cuando $b = 0$

La ecuación toma la forma $ax^2 + c = 0$. Para resolverla:

1. Despejar x^2
2. Extraer la raíz cuadrada (considerando ambos signos)

Ejemplo

$$4x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = \frac{5}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Caso 2: Cuando $c = 0$

La ecuación toma la forma $ax^2 + bx = 0$. Para resolverla:

1. Factorizar la incógnita x
2. Aplicar la propiedad: si $m \cdot n = 0$, entonces $m = 0$ o $n = 0$

Ejemplo

$$x^2 + 3x = 0$$
$$x \cdot (x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -3$$

Ecuaciones Completas

Factorización

Una ecuación cuadrática se puede expresar como:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Ejemplo

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$
$$(x - 7)(x + 4) = 0$$

$$x_1 = 7$$
$$x_2 = -4$$

Factorización del Trinomio de Segundo Grado

La factorización sigue el patrón:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$$

Ejemplo

Resolver:

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

Buscamos dos números que:

- Multiplicados den -28
- Sumados den -3

Combinación	Producto	Combinación	Suma
$-7 \cdot 4$	-28	$-7 + 4$	-3
$-4 \cdot 7$	-28	$-4 + 7$	3
$-1 \cdot 28$	-28	$-1 + 28$	27
$-28 \cdot 1$	-28	$-28 + 1$	-27
$-14 \cdot 2$	-28	$-14 + 2$	-12
$-2 \cdot 14$	-28	$-2 + 14$	12

La combinación que cumple es -7 y 4:

$$(x - 7)(x + 4) = 0$$

Factorización General

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Debemos encontrar a, b, c, d tales que:

- ac = coeficiente de x^2
- bd = término independiente
- $ad + bc$ = coeficiente de x

Ejemplo

Resolver:

$$3x^2 - 5x - 8 = 0$$

Posibles combinaciones para $ac = 3$:

$$\begin{gathered} 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot (-3) \\ (-3) \cdot (-1) \end{gathered}$$

Posibles combinaciones para $bd = -8$:

$$\begin{array}{cccc} -8 \cdot 1 & 8 \cdot (-1) & -4 \cdot 2 & 4 \cdot (-2) \\ -2 \cdot 4 & 2 \cdot (-4) & -1 \cdot 8 & 1 \cdot (-8) \end{array}$$

Combinación correcta: $(3x - 8)(x + 1) = 0$ porque:

$$3 \cdot 1 + (-8) \cdot 1 = -5$$

Completación de Cuadrados

Transformamos a la forma:

$$(x + d)^2 = e$$

Ejemplo

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 7 \\ x^2 + 6x + 9 &= 7 + 9 \quad \text{(Añadimos } \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9\text{)} \\ (x + 3)^2 &= 16 \\ x + 3 &= \pm 4 \\ x &= -3 \pm 4 \\ x_1 = 1, &\quad x_2 = -7 \end{aligned}$$

Fórmula General

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Para $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

Naturaleza de las Raíces

El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ determina el tipo de soluciones:

Caso	**Discriminante**	**Soluciones**
$\Delta > 0$	Positivo	2 raíces reales distintas
$\Delta = 0$	Cero	1 raíz real doble
$\Delta < 0$	Negativo	2 raíces complejas conjugadas

Ejemplos

- $x^2 - 5x + 6 = 0$: $\Delta = 1 > 0$ (2 soluciones reales)
- $x^2 - 4x + 4 = 0$: $\Delta = 0$ (1 solución doble)
- $x^2 + x + 1 = 0$: $\Delta = -3 < 0$ (soluciones complejas)

Comparación de Métodos

Método	**Cuándo usarlo**
Factorización	Cuando es fácil encontrar los factores
Completar cuadrados	Para derivar la fórmula general
Fórmula general	Siempre funciona

Números Complejos

Números Imaginarios: Poseen la unidad imaginaria i:

$$\sqrt{-1} = i$$

Números Complejos: Tienen parte real e imaginaria:

$$3 + 5i \quad \text{(Parte Real = 3, Parte Imaginaria = 5i)}$$

Nota: El DEMRE eliminó los números complejos de la PAES, pero es importante conocerlos.

Discriminante Negativo

Cuando $\Delta < 0$, las soluciones son complejas conjugadas:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} i$$

Ejemplo de conjugados: $1 + i$ y $1 - i$

Ejemplo:

Para $\Delta = b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Propiedades de las Raíces

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplos

La ecuación de segundo grado cuyas raíces son: $4 + 2\sqrt{5} \quad \text{y} \quad 4 - 2\sqrt{5}$ es

A. $2x^2 - 16x - 4 = 0$

B. $x^2 - 8x - 4 = 0$

C. $x^2 + 8x + 4 = 0$

D. $2x^2 - 8x + 4 = 0$

E. $x^2 - 4x + 8 = 0$

Resolución:

Aplicamos las propiedades de las raíces:

$$(4 + 2\sqrt{5}) + (4 - 2\sqrt{5}) = -\frac{b}{a} \Rightarrow 8 = -\frac{b}{a}$$

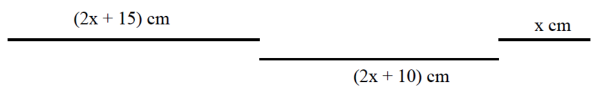
$$(4 + 2\sqrt{5}) \cdot (4 - 2\sqrt{5}) = \frac{c}{a} \Rightarrow (16 - 20) = \frac{c}{a} \Rightarrow -4 = \frac{c}{a}$$

- Si $a = 1$: $b = -8$, $c = -4 \Rightarrow x^2 - 8x - 4 = 0$ (Opción B)
- Si $a = 2$: $b = -16$, $c = -8 \Rightarrow 2x^2 - 16x - 8 = 0$ (No aparece)

$\boxed{B}$

III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) En la figura adjunta se presentan las medidas de tres segmentos con los que, para algún valor de x , se puede construir un triángulo rectángulo.



¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite calcular el valor de x ? **[PAES M1 Regular 2024]**

a) $x^2 + 20x + 125 = 0$
b) $7x^2 + 100x + 325 = 0$
c) $9x^2 + 100x + 325 = 0$
d) $x^2 - 20x - 125 = 0$

2) Si m y n son las soluciones de la ecuación cuadrática $5x^2 + x - 5 = 0$, ¿cuál es el valor de $\left(\frac{m+n}{mn}\right)^{-1}$? **[PAES M2 Regular 2024]**

a) 5
b) $\frac{1}{5}$
c) $-\frac{1}{5}$
d) -1
e) -5

3) Considera el triángulo ABC, con AB = BC = 12 cm y sea x la medida, en cm, de la altura trazada desde el vértice B, la cual excede en 3 cm a la medida de AC. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite calcular x ? **[PAES M2 Regular 2024]**

a) $2x^2 - 6x = 135$
b) $5x^2 + 6x = 567$
c) $2x^2 + 6x = 135$
d) $5x^2 - 6x = 567$
3) $5x^2 - 6x = 135$

4) Considera un triángulo cuya área es 39 cm^2 y su altura es 7 cm mayor que la medida de su base respectiva.
Si b representa la medida de la base, en cm, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar su valor? **[PAES M2 Invierno 2024]**

a) $b^2 - 7b + 78$
b) $b^2 + 7b + 78$
c) $b^2 - 7b - 78$
d) $b^2 + 7b - 78$

5) ¿Qué valor o valores debe tomar k para que la ecuación $x^2 + kx + 9 = 0$, en x , tenga una única solución **[PAES M2 Invierno 2024]**

a) 6 o -6
b) 3 o -3
c) Solo 36
d) Solo 6

6) Si las raíces (o soluciones) de la ecuación $2x^2 + kx - k = 0$ son x_1 y x_2 , con $k \neq 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$? **[PAES M2 Invierno 2024]**

a) 1
b) $1 - k$
c) $1 + k$
d) $1 - \frac{k}{2}$
e) $\frac{k}{2}$

7) Considera la ecuación $qx^2 + (q - 2)x - 2q - 1 = 0$, en x.
¿Para qué valor de q el producto de sus raíces es -4 ? **[PAES M2 Invierno 2024]**

a) $-\frac{2}{3}$
b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{2}$

8) Considera la ecuación $(x - 3)(x - 4) = 2$.
¿Cuál de los siguientes argumentos es válido? **[PAES M2 Regular 2023]**

a) La ecuación posee dos soluciones, porque $x = 3$ y $x = 4$ satisfacen la igualdad.
b) Las soluciones de la ecuación son $x = 2$ y $x = 5$, porque $(2 - 3)(2 - 4) = 2$ y $(5 - 3)(5 - 4) = 2$.
c) Las soluciones son $x = 2$ y $x = 5$, porque ambos valores satisfacen la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$.
d) Las soluciones de la ecuación son ambas positivas, porque el discriminante asociado a la ecuación es positivo.

9) ¿Cuál de las siguientes condiciones para m permite asegurar que las soluciones de la ecuación $mx^2 + mx + 2 = 0$, en x, no sean números reales? **[PAES M2 Regular 2023]**

a) $m < 0$
b) $m \leq \sqrt{8}$
c) $m \leq 8$
d) $-8 < m < 0$
e) $0 < m < 8$

10) Considera un rectángulo cuya área es M cm^2 , tal que su largo mide 2 cm más que su ancho. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el perímetro del rectángulo en función de M? **[PAES M2 Regular 2023]**

a) $8 + 4\sqrt{1 + -M}$
b) $2\sqrt{M} + 4$
c) $-4 + 4\sqrt{1M}$
d) $\frac{M - 4}{4}$
e) $4\sqrt{1 + M}$

IV. Ejercicios tipo PAES

11) ¿Cuál(es) es (son) la(s) raíz(ces) de la ecuación $4x^2 - 4x + 5 = 0$?

a) $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{5}{2}$
b) Solo $\frac{1}{2}$
c) Solo $\frac{1}{2} + i$
d) $\frac{1}{2} + i$ y $\frac{1}{2} - i$
e) $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{6}}{2}$

12) Carmen compró cierto número de pasteles, todos de igual precio, por un total de \$18.000. Si hubiera comprado 6 pasteles menos con la misma cantidad de dinero, cada pastel le habría costado \$100 más. ¿Cuántos pasteles compró Carmen?

a) 18
b) 30
c) 50
d) 72
e) Ninguna de las anteriores.

13) En la ecuación $x^2 + 16 = kx$, ¿qué valor debe tener k para que sus raíces sean una la opuesta de la otra?

a) -16
b) -4
c) 0
d) 4
e) 16

14) Si la suma de dos números es 80 y su producto es 1.500 , entonces un posible valor de la diferencia entre estos números es

a) 20
b) 40
c) 60
d) 70
e) 90

15) Con respecto a la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ de soluciones x_1 y x_2 , podemos afirmar **correctamente** que

I) La ecuación $ax^2 + 2bx + 4c = 0$ tiene por soluciones a $2x_1$ y $2x_2$.
II) La ecuación $cx^2 + bx + a = 0$ tiene por soluciones a $\frac{1}{x_1}$ y $\frac{1}{x_2}$.
III) La ecuación $ax^2 - bx + c = 0$ tiene por soluciones a $-x_1$ y $-x_2$.

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo II y III
d) I, II y III
e) Ninguna de las anteriores.

16) Si m y p son números reales, las raíces de la ecuación $x^2 + mx + p = 0$, son α y β , entonces es **FALSO** que

a) si $m = 0$ y $p > 0$, entonces α y β son números reales irracionales.
b) $\alpha + \beta = -m$
c) la ecuación también se puede escribir como $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$
d) si $m^2 - 4p < 0$, entonces α y β son complejas conjugadas.
e) $\alpha \cdot \beta = p$

17) Si en la ecuación cuadrática $2ax^2 - bx + a^2b^2 = 0$ se sabe que $b \neq 0$, entonces, ¿qué valor debe tomar a para que la ecuación tenga soluciones reales y iguales?

a) $-\frac{1}{2}$
b) 0
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

18) Si la suma de las raíces de una ecuación cuadrática es -4 y su producto es 13, entonces

I) Las raíces de la ecuación no son números reales.
II) La ecuación mencionada es $x^2 - 4x + 13 = 0$.
III) La ecuación se puede escribir como $(x + 4)(x - 13) = 0$.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) Solo II y III

19) Se puede afirmar que las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$, con p y q números reales, son complejas no reales si:

(1) $p^2 < 4q$
(2) $p = 0$ y $q > 0$

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

20) Se puede afirmar que la ecuación $px^2 + qx + r = 0$ tiene dos soluciones reales, una la opuesta de la otra, si:

(1) $p \cdot r < 0$.
(2) $q = 0$.

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional