



Guía N°9 (M2)

<< Función Potencia, Exponencial y Logarítmica >>

NOMBRE: _____

I. Introducción

Las **expresiones algebraicas** son combinaciones de números, variables y operaciones matemáticas, como la suma, resta, multiplicación y división. Se representan mediante símbolos y letras, donde los números se consideran constantes y las letras representan variables, es decir, valores que pueden variar.

Producto Notable	Fórmula
Binomio al cuadrado	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Binomio al cubo	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Producto de binomios con término común (caso simple)	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Producto de binomios con término común (caso general)	$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Factorización	Fórmula General
Factor Común	$ab + ac = a(b + c)$
Agrupación	$ab + ac + db + dc = (a + d)(b + c)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Trinomio $x^2 + bx + c$	$x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n)$
Trinomio $ax^2 + bx + c$	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
Factor Por Signo	$-a - b = -(a + b)$

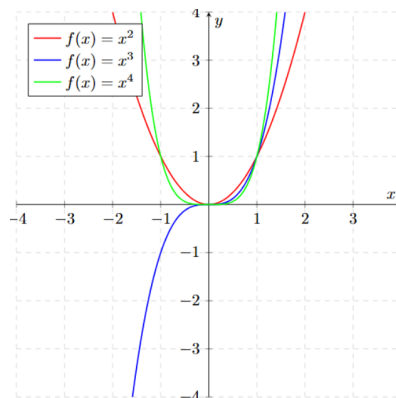
II. Función Potencia, Exponencial y Logarítmica

Función Potencia

Una **Función Potencia** es una función de la forma con

$$f(x) = a \cdot x^n \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ y } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

donde a es llamado **coeficiente** y n es llamado **exponente**.

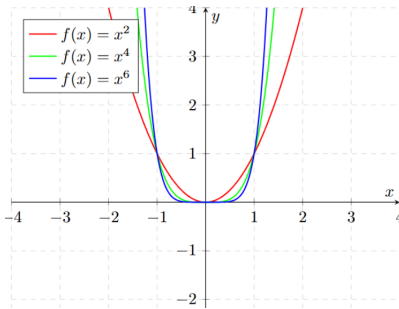


Estas funciones presentan propiedades interesantes según si el exponente es par o impar, lo que determina su simetría y comportamiento.

Funciones Potencia Pares

Las funciones con exponente par ($n = 2, 4, 6, \dots$) tienen características especiales:

- $f(x) = x^2$ (función cuadrática)
- $f(x) = x^4$
- $f(x) = x^6$



Propiedades de las Funciones Pares

- Son simétricas respecto al eje y
- Cumplen que $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio
- Su gráfica tiene forma de parábola cuando $n = 2$ y se hace más "plana" cerca del origen para $n > 2$
- Todas pasan por los puntos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$

Paridad

La paridad es una propiedad fundamental de las funciones potencia. Para una función par:

$$f(x) = f(-x)$$

Ejemplos

$$f(-3) = (-3)^2 = 9 = f(3)$$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 = f(2)$$

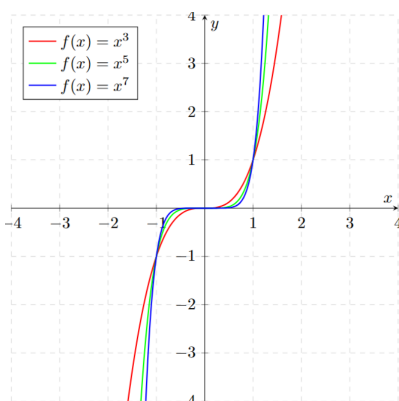
$$f(-1) = (-1)^2 = 1 = f(1)$$

Esta simetría se puede observar claramente en la gráfica de $f(x) = x^2$, donde ambos lados del eje y son imágenes especulares.

Funciones Potencia Impares

Las funciones con exponente impar ($n = 3, 5, 7, \dots$) presentan un comportamiento diferente:

- $f(x) = x^3$ (función cúbica)
- $f(x) = x^5$
- $f(x) = x^7$



Propiedades de las Funciones Impares

- Son simétricas respecto al origen
- Cumplen que $f(-x) = -f(x)$ para todo x en su dominio
- Su gráfica pasa del tercer cuadrante al primer cuadrante
- Todas pasan por los puntos $(-1, -1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$

Imparidad

La condición de función impar se expresa como:

$$-f(x) = f(-x)$$

Ejemplos

Para $f(x) = x^3$:

$$f(-1) = (-1)^3 = -1 = -f(1)$$

$$f(-2) = (-2)^3 = -8 = -f(2)$$

$$f(-3) = (-3)^3 = -27 = -f(3)$$

Función Exponencial

Una **Función Exponencial** es una función de la forma:

$$f(x) = a^x \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

donde:

- a se llama la **base** de la función
- x es el exponente (variable independiente)
- El dominio es \mathbb{R} (todos los números reales)
- El rango es \mathbb{R}^+ (todos los reales positivos)

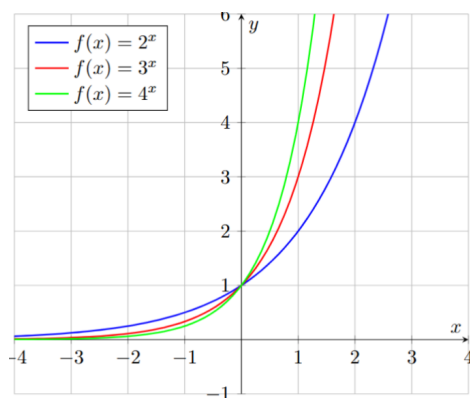
Propiedades Generales

- Pasa siempre por el punto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ para cualquier $a \neq 0$
- No tiene raíces (nunca corta el eje x)
- La asíntota horizontal es el eje x ($y = 0$)
- Es inyectiva (uno a uno)

Caso $a > 1$

Cuando la base es mayor que 1, la función es estrictamente creciente:

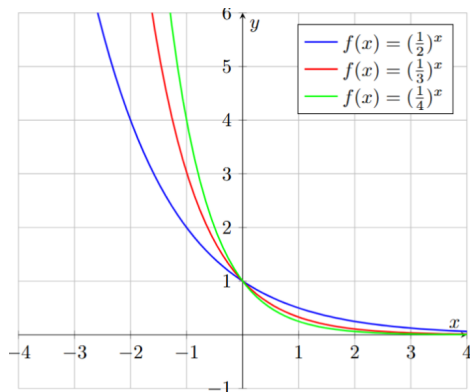
$$f(x) = a^x \quad \text{con } a > 1$$



Caso $0 < a < 1$

Cuando la base está entre 0 y 1, la función es estrictamente decreciente:

$$f(x) = a^x \quad \text{con } 0 < a < 1$$



Función Logarítmica

Una **Función Logarítmica** es una función de la forma:

$$f(x) = \log_b(x) \quad \text{con } b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

donde:

- b es la **base** del logaritmo ($b > 0, b \neq 1$)
- x es el argumento ($x > 0$)
- El dominio es \mathbb{R}^+ (todos los reales positivos)
- El rango es \mathbb{R} (todos los números reales)

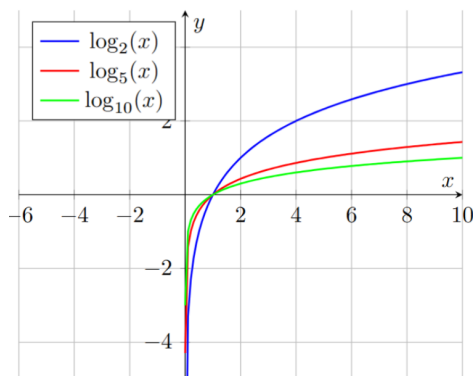
Propiedades Fundamentales

- Pasa siempre por el punto $(1, 0)$ porque $\log_b(1) = 0$ para cualquier base b
- Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ (eje y)
- Es inyectiva (uno a uno)
- Es la función inversa de la función exponencial: $y = \log_b(x) \Leftrightarrow x = b^y$

Caso $b > 1$

Cuando la base es mayor que 1, la función es estrictamente creciente:

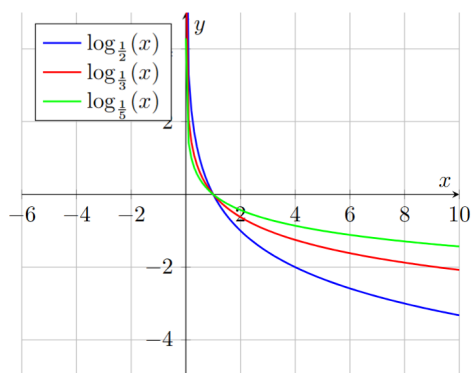
$$f(x) = \log_b(x) \quad \text{con } b > 1$$



Caso $0 < b < 1$

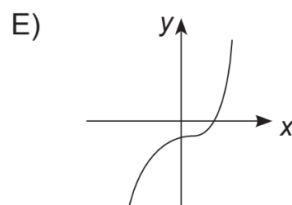
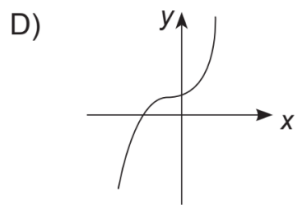
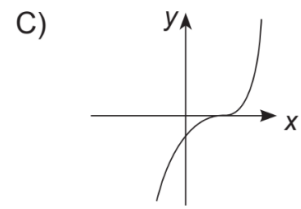
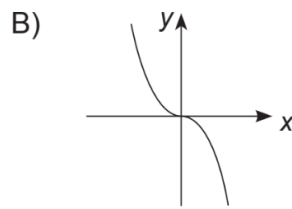
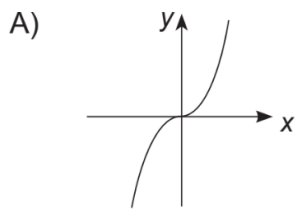
Cuando la base es mayor que 1, la función es estrictamente decreciente:

$$f(x) = \log_b(x) \quad \text{con } 0 < b < 1$$



III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función real $f(x) = (x - 2)^3$?



2) Sea $f(x) = \frac{4x^3}{5}$ una función en los reales. El valor de $2 \cdot f\left(\frac{5}{2}\right)$ es

- a) 12,5
- b) 25
- c) 50
- d) 100
- e) ninguno de los valores anteriores.

3) Sea la función $h(x) = \frac{ax^n}{2}$, con a y x en los reales y n un número entero positivo. Si $a \neq 0$, entonces $h(2a - 1)$ es siempre igual a

- a) 2^{n-1}
- b) a^{1-n}
- c) $(2a)^{1-n}$
- d) $\frac{2^{n-1}}{a}$
- e) $\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}$

4) Sean las funciones $g(x) = (x - a)^3$ y $h(x) = ax^4$, con x en los reales y a un número distinto de cero. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)?

- I) $\frac{g(2a)}{h(a)} = a^2$
- II) $g(-a) \cdot h\left(\frac{1}{a}\right) = -8$
- III) $g(0) \cdot h(-1) = -a^4$

- a) Solo I
- b) Solo III
- c) Solo I y II
- d) Solo II y III
- e) I, II y III

5) Sea la función real $f(x) = a \cdot b^x$ con a y b números reales positivos distintos de uno. Entonces, $(a \cdot f(n + 1))$ es **siempre** igual a

- a) $a \cdot b^{n+1}$
- b) $a^2 \cdot b^n + 1$
- c) $a^2 \cdot b^{n+1}$
- d) $2a \cdot b^{n+1}$
- e) $2a \cdot b^n + 1$

6) Si en la función real $f(x) = k \cdot a^x$ se sabe que $f(0) = 5$ y que $f(3) = 40$, ¿cuáles son los valores de k y a , respectivamente?

- a) 0 y 4
- b) 1 y 20
- c) 2 y 5
- d) 5 y 2
- e) 5 y 8

7) Sean $f(x) = 5^{x-1}$ una función real. Entonces, $(5 \cdot f(n+1) - f(n))$, con n un número real, es igual a

- a) 5
- b) $4 \cdot 5^{n-1}$
- c) $24 \cdot 5^{n-1}$
- d) $4 \cdot 5^{n+1}$
- e) $24 \cdot 5^{n+1}$

8) Sea la función real $f(x) = -a \log_b(x+1)$, con a un número real distinto de cero y b un número real positivo y distinto de 1. Entonces, **siempre** es verdadero que

- a) el dominio de f es el intervalo $]0, +\infty[$
- b) el recorrido de f son todos los reales.
- c) si $b > 1$, entonces la función es creciente.
- d) si $a < 0$, entonces la función es decreciente.
- e) si $a < 0$ y $0 < b < 1$, entonces la función es creciente.

9) Si $g(x) = \log_2 x$ es una función real, entonces la expresión $g(32) - g(16)$ es igual a

- a) 1
- b) 4
- c) 8
- d) 16
- e) ninguno de los valores anteriores.

10) Según la función real $f(x) = \log_3 x + 1$, ¿cuál es el valor de $f(\frac{1}{9}) \cdot f(27)$?

- a) -4
- b) -2
- c) 2
- d) 3
- e) 6

IV. Ejercicios tipo PAES

11) Sea $g(x) = 2px^5 - 3$ una función en los reales. Si $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$, entonces el valor numérico de p es

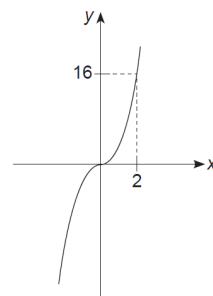
- a) $\frac{1}{72}$
- b) $\frac{2}{81}$
- c) $\frac{4}{81}$
- d) $\frac{2}{9}$
- e) $\frac{8}{9}$

12) Sean $h(x) = x^4$ y $p(x) = ax^n$ funciones reales, con a positivo y n un entero positivo distinto de 1. Es posible determinar la cantidad de puntos de intersección entre los gráficos asociados a h y a p , si:

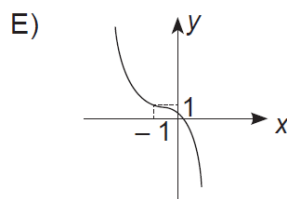
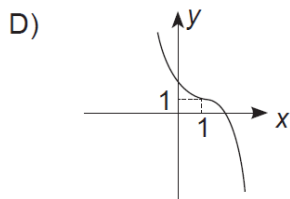
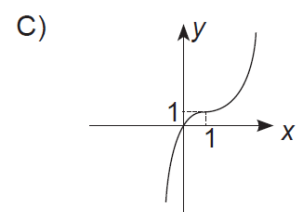
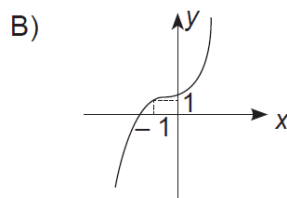
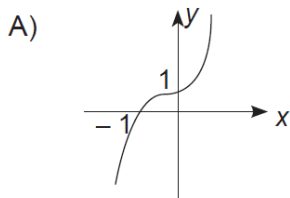
- (1) $a = 2$
 - (2) $n = 3$
- a) (1) por sí sola
 - b) (2) por sí sola
 - c) Ambas juntas, (1) y (2)
 - d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
 - e) Se requiere información adicional

13) ¿Cuál de las siguientes funciones está mejor representada por el gráfico adjunto?

- a) $f(x) = \frac{x^5}{2}$
- b) $g(x) = x^3$
- c) $h(x) = 4x^2$
- d) $m(x) = x^4$
- e) $n(x) = 4x^3$



14) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa **mejor** a la función real $f(x) = (1 - x)^5 + 1$?



15) Sea $f(x) = a \cdot 3^x$ una función real. Si $f(4) = 16$, entonces $f(2)$ es

- a) $\frac{16}{81}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{16}{9}$
- d) $\frac{8}{3}$
- e) 4

16) Sea la función real $f(x) = 3 \cdot 5^{x+n}$, con x y n números reales. Si $f(1) = \frac{3}{5}$, entonces $f(2)$ es igual a

- a) $6 \cdot 5^{-1}$
- b) $3 \cdot 5$
- c) 3
- d) $3 \cdot 5^2$
- e) $3 \cdot 5^4$

17) Sea la función $f(x) = 3 \cdot 2^x$ definida en los reales. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

- I) $f(0) = 3$
- II) $f(-1) = \frac{3}{2}$
- III) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{18}$

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) Solo III
- d) Solo I y III
- e) I, II y III

18) Si $f(x) = \log_4 x$ es una función real, entonces $f(1) - f(256)$ es igual a

- a) -1020
- b) -64
- c) -4
- d) 0
- e) 4

19) Sea la función $f(x) = \log x$, con x un número real positivo. ¿Para qué valor(es) de a se cumple la igualdad $f(2a + 1) = f(1 - 10a) - f(5)$?

- a) $\frac{-5}{12}$
- b) $\frac{-1}{5}$
- c) $\frac{-1}{10}$ y $\frac{1}{10}$
- d) $\frac{1}{10}$
- e) Para ningún valor real de a

20) Sea la función real $f(x) = \log_{11} x + \log 100$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $f(11) = 3$
- II) El dominio de f son los reales positivos.
- III) 4 pertenece al recorrido de f .

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) Solo III
- d) Solo II y III
- e) I, II y III