



CLASE N°5:

“Raíces”

Objetivos de la clase:

- Propiedades de las potencias de base racional y exponente racional.
- Descomposición y propiedades de las raíces enésimas en los números reales.
- Problemas que involucren potencias y raíces enésimas en los números reales en diversos contextos.



Prueba de Acceso a la Educación Superior



Eje de contenidos de M1:

1

Números

2

Probabilidad y Estadística

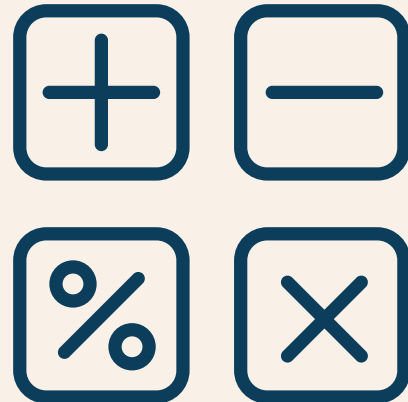
3

Álgebra y Funciones

4

Geometría

Eje de Números



~~M1~~

~~NÚMEROS ENTEROS~~

~~M1~~

~~NÚMEROS RACIONALES~~

~~M1~~

~~PORCENTAJES~~

~~M1~~

~~POTENCIAS~~

M1

RAÍCES

Reglas de la clase



**RITMO DE LA
CLASE**



**PREGUNTAS EN
CLASE**



**DUDAS AL
CORREO**

Potencias con:
Base Racional
Exponente Entera

Propiedades de las Potencias

$$1) \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

$$2) \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

$$3) \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n$$

$$4) \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n$$

$$5) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

$$6) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Propiedades de las Potencias

Potencia de exponente racional

Una potencia de exponente racional equivale a una raíz de índice igual al denominador del racional elevador al numerador de dicho racional.

$$\sqrt[5]{4^3} = 4^{\frac{3}{5}}$$

Pero eso será para la siguiente clase...

Potencias con:
Base Racional
Exponente Racional

Raíces Enésimas

Las raíces son la operación contraria a la potencia, por ejemplo, si elevamos un número a la potencia de 3, y posteriormente, aplicamos la raíz de índice 3, el número se mantiene exactamente igual.

$$\sqrt[3]{a^3} = (a^3)^{\frac{1}{3}} = a^{3 \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$$

De este modo, una raíz de índice “n”, es una potencia de exponente “1/n”

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Raíces Enésimas

En la expresión:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$



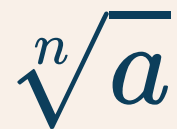
es el símbolo de la raíz o radical.

n

es el índice de la raíz.

a

es el radicando o cantidad subradical.



es la raíz enésima de a .

Ejemplo Raíces

Diagram illustrating the components of the radical expression $\sqrt[6]{64} = 2$ and its equivalent exponential form $2^6 = 64$.

Labels and arrows pointing to the components:

- índice** (index) points to the 6 in the radical.
- raíz** (root) points to the 2 in the equation.
- símbolo de raíz** (root symbol) points to the radical symbol $\sqrt{}$.
- radicando** (radicand) points to the 64 inside the radical.

The diagram shows the relationship between the radical form and the exponential form: $\sqrt[6]{64} = 2 \leftrightarrow 2^6 = 64$.

Propiedades de las Raíces

Propiedades de las Raíces

$$1) \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

$$2) \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

$$3) \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n$$

$$4) \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n$$

$$5) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

$$6) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Propiedades de las Raíces

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Propiedades de las Raíces

Conversión de Raíz a Potencias

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[6]{4^3} = 4^{\frac{3}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Propiedades de las Raíces

Multiplicación de raíces de igual índice

1) La raíz de un producto es igual al producto de las raíces, del mismo índice, de los factores.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Propiedades de las Raíces

División de raíces de igual índice

2) La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces, del mismo índice, del dividendo y divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[3]{0,125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Propiedades de las Raíces

Raíz de una Raíz

3) La raíz de una raíz es otra raíz cuyo índice es igual al producto de los índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[12]{5}$$

Propiedades de las Raíces

Potencia de Raíz

4) La raíz de una potencia es igual a la raíz de la base elevada al exponente.

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$$

Propiedades de las Raíces

Introducir factores en un Radical

5) Para introducir un factor dentro de una raíz se eleva el factor al índice de la raíz

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

$$5 \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2}$$

Propiedades de las Raíces

Cambio de índice

6) Una raíz se puede transformar en otra equivalente, amplificando o simplificando por un número natural k .

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[nk]{a}\right)^{mk}$$

$$\sqrt{5} = \left(\sqrt[2 \cdot 3]{5}\right)^{1 \cdot 3} = \left(\sqrt[6]{5}\right)^3$$

Raíz Cuadrada

Raíz Cuadrada

La raíz cuadrada de un **NÚMERO REAL NO NEGATIVO** “y” es otro **NÚMERO REAL NO NEGATIVO** “x”, tal que el cuadrado de este último es igual al primero.

$$\text{Si: } y = x^2$$

$$\text{Entonces: } \sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x|$$

Raíz Cuadrada

PARA TODO número real “a” :

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Entonces la raíz cuadrada de un **número real no negativo** a^2 es otro **número real no negativo** $|a|$.

Cumpliendo con las reglas de multiplicidad, “**negativo por negativo da positivo**” de eso se desprende que potencias de base negativa con exponente par son siempre positivas.

Raíz Cuadrada

PARA TODO número real “a” :

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{64} = 8 \Rightarrow 8^2 = 64$$

$$\sqrt{-16} = \text{No existe un número real, cuya cuarta potencia sea -16}$$

Cumpliendo con las reglas de multiplicidad, “**negativo por negativo da positivo**” de eso se desprende que potencias de base negativa con exponente par son siempre positivas.

Raíz Cuadrada

PARA TODO número real “a” :

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & ; \text{si } a > 0 \\ -a & ; \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Es un error frecuente afirmar que $\sqrt{16} = \pm 4$, argumentando que también $(-4)^2 = 16$.

El error está en no considerar que la definición de raíz cuadrada expresa la condición de entregar **UN NÚMERO NO NEGATIVA**.

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = |4| = 4$$

Raíz Cuadrada para una variable

Raíz Cuadrada

PARA TODA variable “x” :

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & ; \text{si } x > 0 \\ -x & ; \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Aquí $\sqrt{x^2} = \pm x$, pues la respuesta depende del valor desconocido de x .

Raíz Cuadrada:

Racionalización de Denominadores

Contextualización

Los matemáticos prefieren evitar raíces en los denominadores por considerarlo “poco estético” o “inadecuado”. Por ello, el proceso de **racionalización** consiste en eliminar las raíces del denominador, convirtiéndolas en expresiones racionales.

El procedimiento se llama racionalizar pues busca quitar la raíz (un irracional) del denominador, quedando en vez un racional

Racionalización

Raíz Cuadrada

$$1) \frac{1}{\sqrt{a}} =$$

Racionalización

Raíz Cuadrada

$$1) \frac{1}{\sqrt{a}} =$$

Se multiplica al numerador y al denominador por el número que se encuentra en el denominador

Racionalización

Raíz Cuadrada

$$1) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} =$$

Se multiplica al numerador y al denominador por el número que se encuentra en el denominador

Racionalización

Raíz Cuadrada

$$1) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}}$$

Se multiplica al numerador y al denominador por el número que se encuentra en el denominador

Racionalización

Raíz Cuadrada

$$1) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Se multiplica al numerador y al denominador por el número que se encuentra en el denominador

Racionalización

Raíz Enésima

$$2) \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} =$$

Racionalización

Raíz Enésima

$$2) \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} =$$

Utilizamos la misma metodología anterior, pero esta vez, multiplicamos por un número cuyo exponente anule la raíz.

Racionalización

Raíz Enésima

$$2) \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} =$$

Utilizamos la misma metodología anterior, pero esta vez, multiplicamos por un número cuyo exponente anule la raíz.

Racionalización

Raíz Enésima

$$2) \quad \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+(n-m)}} =$$

Utilizamos la misma metodología anterior, pero esta vez, multiplicamos por un número cuyo exponente anule la raíz.

Racionalización

Raíz Enésima

$$2) \quad \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+(n-m)}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} =$$

Utilizamos la misma metodología anterior, pero esta vez, multiplicamos por un número cuyo exponente anule la raíz.

Racionalización

Raíz Enésima

$$2) \quad \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+(n-m)}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{a}$$

Utilizamos la misma metodología anterior, pero esta vez, multiplicamos por un número cuyo exponente anule la raíz.

Racionalización

Binomio de Raíces

$$3) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

Racionalización

Binomio de Raíces

$$3) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

Utilizamos la misma metodología anterior, pero esta vez, multiplicamos por el binomio cuyo signo sea el opuesto.

Racionalización

Binomio de Raíces

$$3) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} =$$

Utilizamos la misma metodología anterior, pero esta vez, multiplicamos por el binomio cuyo signo sea el opuesto.

Racionalización

Binomio de Raíces

$$3) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}} =$$

Utilizamos la misma metodología anterior, pero esta vez, multiplicamos por el binomio cuyo signo sea el opuesto.

Racionalización

Binomio de Raíces

$$3) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

Utilizamos la misma metodología anterior, pero esta vez, multiplicamos por el binomio cuyo signo sea el opuesto.



**¡Muchas gracias
por su atención!**

Ejemplo



21. ¿Cuál de los siguientes números es igual a $\frac{2}{\sqrt{2}}$?

A) $2\sqrt{2}$

B) 2

C) $\sqrt{2}$

D) $2 - \sqrt{2}$

Ejemplo



21. ¿Cuál de los siguientes números es igual a $\frac{2}{\sqrt{2}}$?

A) $2\sqrt{2}$

B) 2

☒ C) $\sqrt{2}$

D) $2 - \sqrt{2}$

Ejemplo



2. Si m es un número entero mayor que 1 y x es un número real positivo, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a $x \cdot \sqrt[m]{x}$?

A) $\sqrt[m]{x^2}$

B) $x^{m+1} \sqrt{x}$

C) $\sqrt[m]{x^m}$

D) $\sqrt[m]{x^{m+1}}$

E) $\sqrt[m]{x^3}$

Ejemplo



2. Si m es un número entero mayor que 1 y x es un número real positivo, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a $x \cdot \sqrt[m]{x}$?

A) $\sqrt[m]{x^2}$

B) $x^{m+1} \sqrt{x}$

C) $\sqrt[m]{x^m}$

☒ D) $\sqrt[m]{x^{m+1}}$

E) $\sqrt[m]{x^3}$

Ejemplo



6. Si $P = \sqrt{3} + \sqrt{a}$, $Q = \sqrt{3+a}$ y $R = 3 + \sqrt{a}$, con $a > 0$, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

A) $Q < P < R$

B) $Q = P < R$

C) $Q < R < P$

D) $P < R < Q$

E) $R < P = Q$

Ejemplo



6. Si $P = \sqrt{3} + \sqrt{a}$, $Q = \sqrt{3+a}$ y $R = 3 + \sqrt{a}$, con $a > 0$, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

- ☒ A) $Q < P < R$
- ☐ B) $Q = P < R$
- ☐ C) $Q < R < P$
- ☐ D) $P < R < Q$
- ☐ E) $R < P = Q$

Ejemplo



5. Si $p = 2\sqrt{3}$, $q = 3\sqrt{2}$ y $s = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

A) $p < q < s$

B) $p - s < s - q$

C) $q - p < s$

D) $\frac{p}{2} - \frac{q}{3} < s$

E) $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} < \frac{1}{s}$

Ejemplo



5. Si $p = 2\sqrt{3}$, $q = 3\sqrt{2}$ y $s = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

A) $p < q < s$

B) $p - s < s - q$

C) $q - p < s$

☒ D) $\frac{p}{2} - \frac{q}{3} < s$

E) $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} < \frac{1}{s}$

Ejemplo



8. Si $p < q$ y $p \neq -q$, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a

$$\sqrt{\frac{(p^2 - q^2)(p - q)}{p + q}}?$$

A) $\sqrt{\frac{p^3 - q^3}{p + q}}$

B) $\sqrt{\frac{p^3 + q^3}{p + q}}$

C) $(p - q) \cdot \sqrt{\frac{p - q}{p + q}}$

D) $\sqrt{p^2 - q^2}$

E) $q - p$

Ejemplo



8. Si $p < q$ y $p \neq -q$, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a

$$\sqrt{\frac{(p^2 - q^2)(p - q)}{p + q}}?$$

A) $\sqrt{\frac{p^3 - q^3}{p + q}}$

B) $\sqrt{\frac{p^3 + q^3}{p + q}}$

C) $(p - q) \cdot \sqrt{\frac{p - q}{p + q}}$

D) $\sqrt{p^2 - q^2}$

☒ E) $q - p$

Ejemplo



9. ¿Cuál de los siguientes valores es igual a $\frac{18 - 6\sqrt{5}}{\sqrt{15} - \sqrt{3}}$?

A) $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

B) $\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$

C) $\sqrt{15}$

D) 12

E) $2\sqrt{15}$

Ejemplo



9. ¿Cuál de los siguientes valores es igual a $\frac{18 - 6\sqrt{5}}{\sqrt{15} - \sqrt{3}}$?

A) $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

B) $\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$

C) $\sqrt{15}$

D) 12

E) $2\sqrt{15}$