



## CLASE N°8:

# “Ecuación Cuadrática”

Objetivos de la clase:

- Resolución y problemas de ecuaciones de segundo grado en diversos contextos.
- Tablas y gráficos de la función cuadrática, considerando la variación de sus parámetros.
- Puntos especiales de la gráfica de la función cuadrática: vértice, ceros de la función e intersección con los ejes.
- Problemas que involucren la función cuadrática en diversos contextos.



# Prueba de Acceso a la Educación Superior



## Eje de contenidos de M2:

1

Álgebra y Funciones

2

Geometría

3

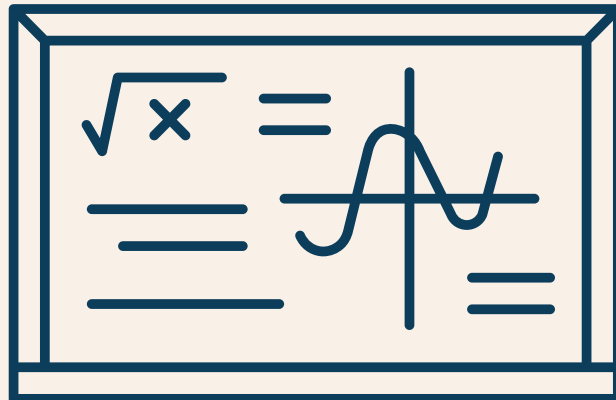
Números

4

Probabilidad y Estadística

## Eje de Álgebra y Funciones

---



~~M2~~

~~EXPRESIONES ALGEBRAICAS~~

~~M2~~

~~ECUACIÓN LINEALES~~

~~M2~~

~~FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN~~

~~M2~~

~~PROPORCIONALIDAD~~

~~M2~~

~~SISTEMAS DE ECUACIONES~~

M2

FUNCIÓN CUADRÁTICA

M2

INECUACIÓN LINEALES

M2

FUNCIÓNES POTENCIAS

M2

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

# Reglas de la clase



**RITMO DE LA  
CLASE**



**PREGUNTAS EN  
CLASE**



**DUDAS AL  
CORREO**

# Ecuación Cuadrática

## Resolución Ecuación Cuadrática

Recordemos que la ecuación general de la ecuación cuadrática es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se debe determinar el valor o los valores que satisfacen la ecuación.

- Ecuaciones Incompletas
- Ecuaciones Completas

**Ecuación Incompleta:**

**Si  $b=0$**

## Ecuaciones Incompletas

Si  $b = 0$ , entonces  $ax^2 + c = 0$ : Debemos despejar  $x$  para luego extraer su raíz cuadrada (con ambos signos para el resultado):

$$\begin{aligned}\text{Ejemplo: } 4x^2 - 5 &= 0 \\ x^2 &= \frac{5}{4} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \\ x &= \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

**Ecuación Incompleta:**

**Si  $c=0$**

## Ecuaciones Incompletas

Si  $c = 0$ , entonces  $ax^2 + bx = 0$ : Para poder despejar  $x$ , se debe factorizar la incógnita (recordar que si  $m \times n = 0$ , eso indica que al menos uno de los factores dos debe ser 0).

**Ejemplo:**  $x^2 + 3x = 0$

$$x \cdot (x + 3) = 0$$

***Entonces podemos saber que:***

$$x_1 = 0$$

*o*

$$x_2 = -3$$

# **Ecuaciones Completas: Factorización**

## Ecuaciones Completas

**Factorizando:** Una ecuación cuadrática se puede escribir como la multiplicación de sus soluciones del estilo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

**Ejemplo:**  $x^2 - 3x - 28 = 0$   
 $(x - 7)(x + 4) = 0$

***Entonces podemos saber que:***

$$x_1 = 7 \qquad 0 \qquad x_2 = -4$$

**Recordar:**

**Factorización del Trinomio de Grado 2**

## Factorización del Trinomio de Grado 2

**Factorizando:** Una ecuación cuadrática se puede escribir como la multiplicación de sus soluciones del estilo:

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + xb + ax + ab = x^2 + x(a + b) + ab$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$$

Encontrar “a” y “b” que multiplicados den “ab” y sumados “a+b”

## Ejemplo

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

**Entonces podemos saber que:**

$$ab = 28 = \begin{array}{l} -7 \cdot 4 \\ -4 \cdot 7 \\ -1 \cdot 28 \\ -28 \cdot 1 \\ -14 \cdot 2 \\ -2 \cdot 14 \end{array}$$

$$(a + b) = \begin{array}{l} -7 + 4 = -3 \\ -4 + 7 = 3 \\ -1 + 28 = 27 \\ -28 + 1 = -27 \\ -14 + 2 = -12 \\ -2 + 14 = 12 \end{array}$$

**Entonces nos queda:**

$$(x - 7)(x + 4) = 0$$

## Factorización del Trinomio de Grado 2

**Factorizando:** Una ecuación cuadrática se puede escribir como la multiplicación de sus soluciones del estilo:

$$(ax + b) \cdot (cx + d) = acx^2 + axd + bcx + bd = acx^2 + x(ad + bc) + bd$$

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + x(ad+bc) + bd$$

Encontrar “a”, “c”, “b” y “d” que multiplicados den “ac” y “bd” y en la multiplicación cruzada “ad+bc”

## Ejemplo

$$3x^2 - 5x - 8 = 0$$

**Entonces podemos saber que:**

$$\begin{aligned} ac = 3 &= 1 \cdot 3 \\ &= -1 \cdot -3 \\ &= -3 \cdot -1 \\ &= 3 \cdot 1 \rightarrow \text{Encontramos el} \\ &\quad \text{correcto} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \quad bd = -8 &= 1 \cdot -8 \\ &= -1 \cdot 8 \\ &= 2 \cdot -4 \\ &= -2 \cdot 4 \\ &= 4 \cdot -2 \\ &= -4 \cdot 2 \\ &= 8 \cdot -1 \\ &= -8 \cdot 1 \rightarrow \text{Encontramos el} \\ &\quad \text{correcto} \end{aligned}$$

$$ad + bc = 3 \cdot 1 + 1 \cdot -8 = -5$$

**Entonces nos queda:**

$$(3x - 8)(x + 1) = 0$$

# **Ecuaciones Completas: Completación de cuadrados**

## Ecuaciones Completas

**Completación de cuadrados:** Se busca llevar la ecuación general a una del tipo “binomio cuadrado”

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad /+3 \Leftrightarrow (x + d)^2 = e$$

**Ejemplo:**  $x^2 + 6x - 7 = 0$  /+16  
 $x^2 + 6x + 9 = 16$

**Entonces tenemos que:**

$$(x + 3)^2 = 16$$

$$(x + 3) = \pm\sqrt{16}$$

$$x = -3 \pm 4$$

**Finalmente sabemos que:**

$$x_1 = 1 \qquad \text{ o } \qquad x_2 = -7$$

# **Ecuaciones Completas: Fórmula General**

## Ecuaciones Completas

**Fórmula General:** Utilizamos la fórmula general para todas las ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Ecuaciones Completas

**Fórmula General:** Utilizamos la fórmula general para todas las ecuaciones cuadráticas

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

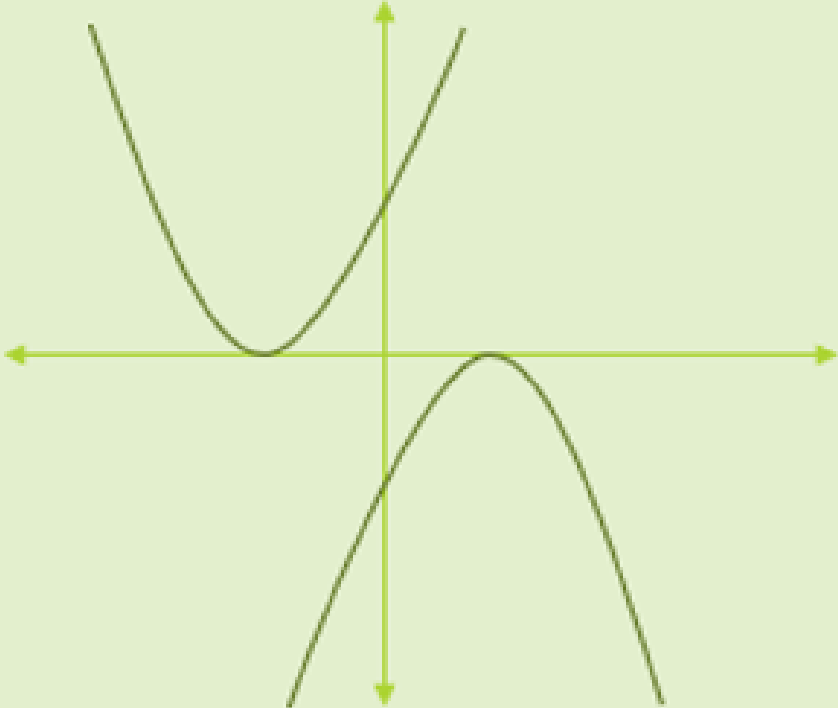
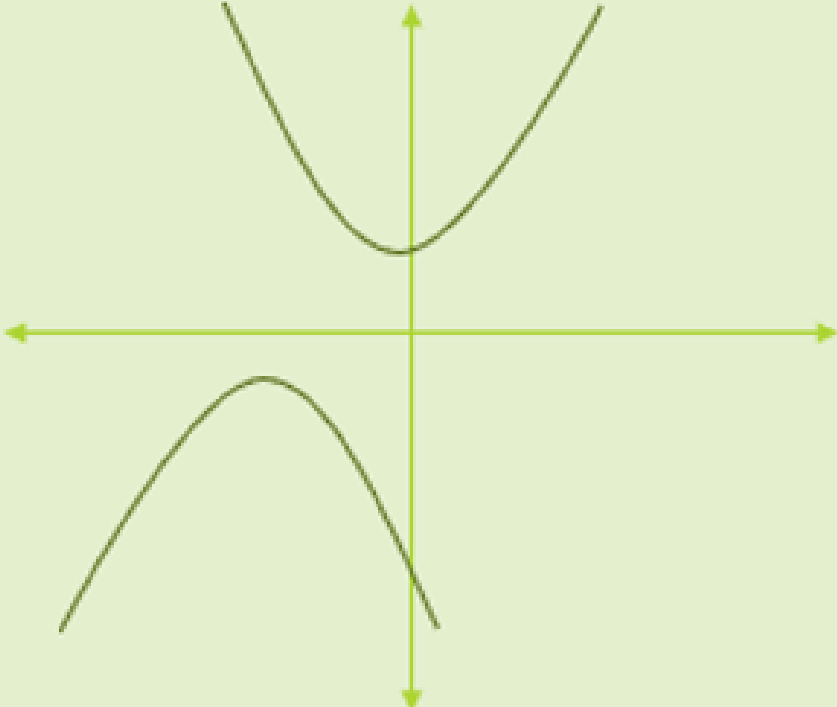
### **Ejemplo**

Para  $x^2 - 5x + 6 = 0$ :

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

## Naturaleza de las raíces

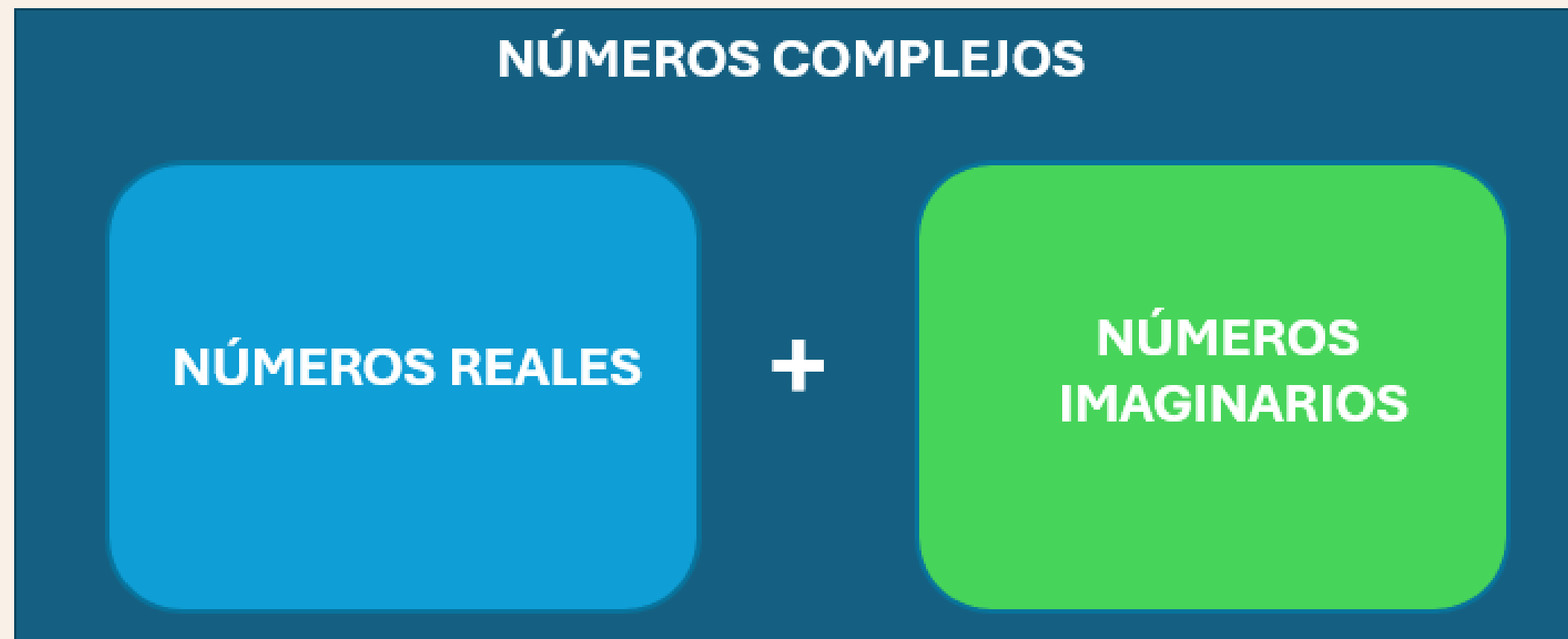
El discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ , es muy importante para las soluciones de las ecuaciones cuadráticas.

| Si $\Delta > 0$ , entonces corta al eje x en dos puntos                             | Si $\Delta = 0$ , entonces corta al eje x en un punto                                | Si $\Delta < 0$ , entonces no corta al eje x                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
| Ambas soluciones son Reales y distintas                                             | Ambas soluciones son Reales e iguales                                                | Ambas soluciones son Complejas y una es el conjugado de la otra.                     |

# Números Complejos:

## Números Complejos

El DEMRE eliminó la sección de números complejos de la PAES, entonces un breve resumen para contextualizar:



## Números Complejos

- Un Número Imaginario es aquel que posee la unidad Imaginaria " $i$ ", que equivale matemáticamente a:

$$\sqrt{-1} = i$$

- ¿Qué sucede? Eso no es posible, pues claro que no es posible, por eso se le acuña el nombre de “imaginario”, pues no es posible en la Realidad.
- De esta manera, por ejemplo " $3 + 5i$ " es un número complejo, posee Parte Real " $3$ " y Parte Imaginaria " $5i$ "

## Discriminante Negativa

- Si  $\Delta < 0$ , significaría que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-(algo)}}{2a}$$

- Pero si queremos reparar la raíz cuadrada:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-1 \cdot (algo)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(algo)}\sqrt{-1}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(algo)}}{2a}i$$

- Notamos claramente que se trata de un Número Complejo

## Discriminante Negativa

- Pero ¿qué significa “conjugado”?:

**"1 + i" y "1 - i" Son conjugados**

- Entonces si volvemos a la ecuación anterior, notamos que sí corresponden a “Conjugados”:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(algo)}}{2a} i$$

# PROPIEDADES DE LA ECC CUADRÁTICA

## Propiedades Cuadráticas

**Teorema de las raíces:** Si conocemos las soluciones de una ecuación cuadrática, podemos conocer los elementos de esta, dado los siguientes teoremas:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

# Ejemplo



- La ecuación de segundo grado cuyas raíces son:  $4 + 2\sqrt{5}$  y  $4 - 2\sqrt{5}$  es

*A.*  $2x^2 - 16x - 4 = 0$

*B.*  $x^2 - 8x - 4 = 0$

*C.*  $x^2 + 8x + 4 = 0$

*D.*  $2x^2 - 8x + 4 = 0$

*E.*  $x^2 - 4x + 8 = 0$

# Ejemplo



- Para la ecuación se cumple que:

$$(4 + 2\sqrt{5}) + (4 - 2\sqrt{5}) = -\frac{b}{a} \Rightarrow 8 = -\frac{b}{a}$$

# Ejemplo



- Para la ecuación se cumple que:

$$(4 + 2\sqrt{5}) + (4 - 2\sqrt{5}) = -\frac{b}{a} \Rightarrow 8 = -\frac{b}{a}$$

$$(4 + 2\sqrt{5}) \cdot (4 - 2\sqrt{5}) = \frac{c}{a} \Rightarrow (16 - 20) = \frac{c}{a} \Rightarrow -4 = \frac{c}{a}$$

# Ejemplo



- Para la ecuación se cumple que:

$$(4 + 2\sqrt{5}) + (4 - 2\sqrt{5}) = -\frac{b}{a} \Rightarrow 8 = -\frac{b}{a}$$

$$(4 + 2\sqrt{5}) \cdot (4 - 2\sqrt{5}) = \frac{c}{a} \Rightarrow (16 - 20) = \frac{c}{a} \Rightarrow -4 = \frac{c}{a}$$

***Entonces podemos saber que si  $a=1$ :***

$$b = -8 \quad y \quad c = -4$$

***Entonces podemos saber que si  $a=2$ :***

$$b = -16 \quad y \quad c = -8$$

# Ejemplo



- Para la ecuación se cumple que:

$$(4 + 2\sqrt{5}) + (4 - 2\sqrt{5}) = -\frac{b}{a} \Rightarrow 8 = -\frac{b}{a}$$

$$(4 + 2\sqrt{5}) \cdot (4 - 2\sqrt{5}) = \frac{c}{a} \Rightarrow (16 - 20) = \frac{c}{a} \Rightarrow -4 = \frac{c}{a}$$

***Entonces podemos saber que si  $a=1$ :***

$$b = -8 \quad y \quad c = -4$$

***Entonces podemos saber que si  $a=2$ :***

$$b = -16 \quad y \quad c = -8$$

Respuesta

$$b) x^2 - 8x - 4 = 0$$



**¡Muchas gracias  
por su atención!**

# Ejemplo



39) Las raíces (o soluciones) de la ecuación  $x(x - 1) = 20$  son

- a) 1 y 20
- b) 2 y 20
- c) 4 y 5
- d) 4 y -5
- e) -4 y 5

# Ejemplo

