CLASE N°11:

“Inecuaciones Lineales”

Objetivos de la clase:

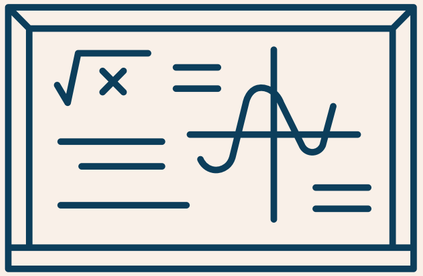
- Resolución de inecuaciones lineales.
- Problemas que involucren inecuaciones lineales en diversos contextos.

Eje de contenidos de M2:

1. Álgebra y Funciones
2. Geometría
3. Números
4. Probabilidad y Estadística

Prueba de Acceso a la Educación Superior

Eje de Álgebra y Funciones



- ~~M2~~ ~~EXPRESIONES ALGEBRAICAS~~
- ~~M2~~ ~~ECUACIÓN LINEALES~~
- ~~M2~~ ~~FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN~~
- ~~M2~~ ~~PROPORCIONALIDAD~~
- ~~M2~~ ~~SISTEMAS DE ECUACIONES~~
- ~~M2~~ ~~FUNCIÓN CUADRÁTICA~~
- ~~M2~~ ~~FUNCIÓNES POTENCIA, EXP Y LOG~~
- ~~M2~~ ~~FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA~~
- M2 INECUACIÓN LINEALES

Reglas de la clase

RITMO DE LA CLASE

PREGUNTAS EN CLASE

DUDAS AL CORREO

Desigualdades o Inecuaciones

Desigualdades o Inecuaciones

En matemáticas, una desigualdad o inecuación es una expresión que indica que una cantidad es mayor, menor, mayor o igual, o menor o igual que otra. Se representan con los siguientes símbolos:

- $P < Q \rightarrow$ P es menor que Q
- $P > Q \rightarrow$ P es mayor que Q
- $P \leq Q \rightarrow$ P es menor o igual que Q
- $P \geq Q \rightarrow$ P es mayor o igual que Q

Propiedades

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

1. Ley de Tricotomía

Para dos números reales *a* y *b*, siempre se cumple una y solo una de estas relaciones:

$$a > b, a < b, a = b$$

Ejemplo:

Para *a*=3 y *b*=5, solo 3<5 es verdadera.

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

2. Propiedad Transitiva

Si a>b y b>c, entonces a>c.

$$a > b, b > c \Rightarrow a > c$$

Ejemplo:

Si 10>5 y 5>2 implica 10>2.

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

3. Propiedad Aditiva

Si a>b, entonces a+c>b+c para cualquier c.

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

Ejemplo:

Si 7>4 implica 7+2>4+2 (es decir, 9>6).

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

4. Suma de Desigualdades

Si a>b y c>d, entonces a+c>b+d.

$$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

Ejemplo:

Si 6>2 y 5>1 implica 6+5>2+1 (11>3).

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

5. Multiplicación por un Positivo

Si a>b y c>0, entonces a · c>b · c.

$$a > b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

Ejemplo:

Si 8>3 y c=2 implica 16>6.

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

6. Multiplicación por un Negativo

Si a>b y c<0, entonces a · c<b · c (El signo se invierte).

$$a > b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

Ejemplo:

Si 4>1 y c=−2 implica −8<−2.

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

7. Multiplicación de Desigualdades Positivas

Si a>b, c>d, y b,d>0, entonces a · c>b · d.

$$a > b, c > d, b > 0, d > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d$$

Ejemplo:

Si 5>2 y 4>3 implica 20>6.

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

8. Desigualdad Absoluta

Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

$$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

Ejemplo:

Si $(-3)^2 = 9 > 0$ implica $2^2 = 4 > 0$.

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

9. Inverso de un Positivo

Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$.

$$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

Ejemplo:

Si $a = 5 > 0$ implica $\frac{1}{5} > 0$.

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

10. Inversos en Desigualdades

Si $a > b > 0$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

$$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Ejemplo:

Si $10 > 2 > 0$ implica $\frac{1}{10} < \frac{1}{2}$.

Propiedades

Las desigualdades no solo describen relaciones entre números, sino que también siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente:

11. Potencias en Desigualdades Positivas

Si $a > 0, b > 0$, y $n \in N$ entonces $a > b$ y $a^n > b^n$.

$$a > b \Rightarrow a^n > b^n$$

Ejemplo:

Si $3 > 2$ implica $3^2 > 2^2 \, (9 > 4)$.

Inecuaciones de Primer Grado

Inecuaciones de Primer Grado

Las inecuaciones de primer grado son desigualdades algebraicas que involucran una variable lineal y se expresan en formas como:

$$ax + b \leqslant 0 \qquad ax + b \geqslant 0$$

$$ax + b < 0 \qquad ax + b > 0$$

A diferencia de las ecuaciones, cuya solución es un valor específico, las inecuaciones tienen infinitas soluciones que forman un intervalo (conjunto de números reales).

Resolución de Inecuaciones

Pasos para Resolver Inecuaciones de Primer Grado:

1. **Aislar** la variable x aplicando propiedades de desigualdades.
2. **Invertir** el signo de la desigualdad si se multiplica o divide por un número negativo.
3. **Expresar** la solución como intervalo o gráficamente en la recta numérica.

Ejemplo: Resolver $-x + 2 > 9$

$$\begin{aligned} -x + 2 &> 9 \\ -x &> 9 - 2 \\ -x &> 7 \\ x &< -7 \end{aligned}$$

Solución: Todos los números reales menores que –7, es decir, $x \in (-\infty, -7)$.

Sistemas de Inecuaciones

Sistemas de Inecuaciones

Un sistema de inecuaciones de primer grado es un conjunto de dos o más desigualdades lineales que comparten la misma variable y cuyas soluciones deben satisfacer todas las inecuaciones simultáneamente. La solución final es la **intersección** de los conjuntos solución individuales.

Pasos para Resolver un Sistemas de Inecuaciones:

1. **Resolver** cada inecuación por separado aplicando las propiedades de las desigualdades.
2. **Hallar la intersección** de todas las soluciones (valores comunes).
3. **Representar** gráficamente en la recta numérica para visualizar el conjunto solución.

Sistemas de Inecuaciones

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 3x-7 & \leq 5 \\ 9-2x & \geq -6-x \\ -x+1 & < x+1 \end{array}\right|$$

Sistemas de Inecuaciones

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 3x-7 & \leq 5 \\ 9-2x & \geq -6-x \\ -x+1 & < x+1 \end{array}\right|$$

$3x-7 \leq 5$

$9-2x \geq 6-x$

$-x+1 < x+1$

Sistemas de Inecuaciones

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\begin{array}{rl} 3x-7 & \leq 5 \\ 9-2x & \geq -6-x \\ -x+1 & < x+1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x-7 &\leq 5 \\ 3x &\leq 12 \\ x &\leq 4 \\ &\boxed{x \leq 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9-2x &\geq 6-x \\ -2x+x &\geq 6-9 \\ -x &\geq -3 \\ x &\leq 3 \\ &\boxed{x \leq 3} \end{aligned}$$

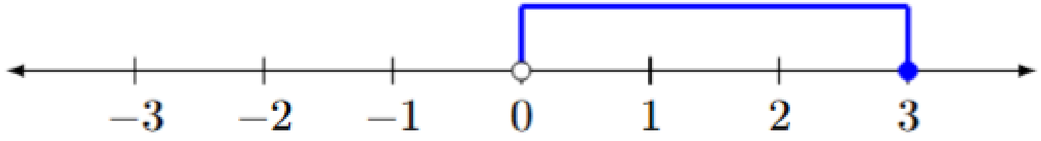
$$\begin{aligned} -x+1 &< x+1 \\ -x-x &< 1-1 \\ -2x &< 0 \\ x &> 0 \\ &\boxed{x > 0} \end{aligned}$$

Sistemas de Inecuaciones

Solución del sistema:

La solución es la intersección de los tres intervalos obtenidos:

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \leq 3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 3 \Rightarrow x \in (0, 3]$$



Inecuaciones Reductibles a dos Factores

Inecuaciones Dos Factores

Las inecuaciones cuadráticas son desigualdades que involucran polinomios de segundo grado y pueden expresarse en las formas generales:

$$(x+a)(x+b) \leqslant 0 \qquad (x+a)(x+b) \geqslant 0$$

$$(x+a)(x+b) < 0 \qquad (x+a)(x+b) > 0$$

Para resolverlas, seguimos un método sistemático que combina factorización, análisis de intervalos y prueba de signos.

Inecuaciones Dos Factores

Pasos para Resolver Inecuaciones Cuadráticas:

1. **Factorizar la expresión cuadrática** (si no está ya factorizada).
2. **Hallar los puntos críticos (raíces)** igualando cada factor a cero.
3. **Determinar los intervalos** entre las raíces.
4. **Analizar el signo** del producto (x+a)(x+b) en cada intervalo:
    a. Usar valores de prueba dentro de cada intervalo.
5. **Seleccionar los intervalos** que satisfacen la desigualdad según el signo requerido (≥, ≤, >, <).

Inecuaciones Dos Factores

Ejemplo Resuelto

Resolver la inecuación:

$$(x+2)(x-3) \leq 0$$

Paso 1: Puntos críticos

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

Paso 2: Intervalos

Los puntos críticos dividen la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty,-2), \quad (-2,3), \quad (3,+\infty)$$

Paso 3: Tabla de signos

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,+\infty)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
Producto	$+$	$-$	$+$

Inecuaciones Dos Factores

Paso 3: Tabla de signos

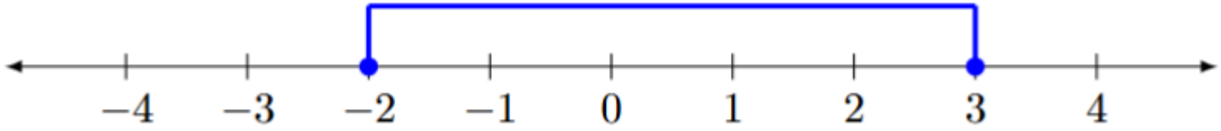
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
Producto	$+$	$-$	$+$

Paso 4: Solución

Para ≤ 0 (valores negativos o cero), seleccionamos:

$$x \in [-2, 3]$$

Representación Gráfica



Solución: $[-2, 3]$

Inecuaciones de Fracciones Algebracias

Inecuaciones Fracciones Algebraicas

Las inecuaciones fraccionarias (o racionales) son desigualdades que involucran cocientes de polinomios, como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0 \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$$

Para resolverlas, es clave analizar los signos del numerador y denominador y determinar los intervalos donde la desigualdad se cumple.

Inecuaciones Fracciones Algebraicas

Pasos para Resolver Inecuaciones Fraccionarias:

1. **Reescribir la desigualdad** con un lado igual a cero (Si es que es necesario).
2. **Hallar los puntos críticos (raíces)** igualando cada factor a cero.
3. **Determinar los intervalos** entre las raíces.
4. **Analizar el signo** del cuociente entre (x+a)/(x+b) en cada intervalo:
    a. Usar valores de prueba dentro de cada intervalo.
5. **Seleccionar los intervalos** que satisfacen la desigualdad según el signo requerido (≥, ≤, >, <).
    a. Excluir el valor que haga el denominador nulo.

Inecuaciones Fracciones Algebraicas

Ejemplo Resuelto

Resolver la inecuación:

$$\frac{3x}{x-1} \geq 2$$

Paso 1: Reescribir la desigualdad

$$\frac{3x}{x-1} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{3x - 2(x-1)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} \geq 0$$

Paso 2: Puntos críticos

$$(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{(Excluido, hace cero el denominador)}$$

Paso 3: Intervalos

Los puntos críticos dividen la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, -2], \quad (-2, 1), \quad (1, +\infty)$$

Inecuaciones Fracciones Algebraicas

Paso 4: Tabla de signos

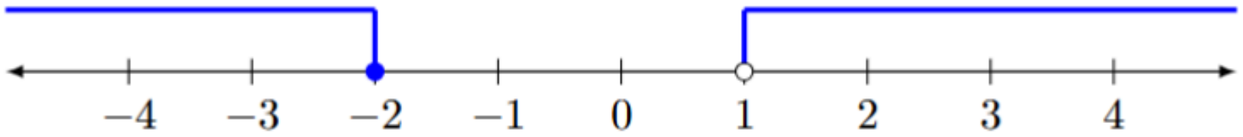
	$(-\infty, -2]$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
Cociente	$+$	$-$	$+$

Paso 5: Solución

Para ≥ 0 (valores positivos o cero), seleccionamos:

$$x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$$

Representación Gráfica



Solución: $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

Inecuaciones con Valor Absoluto

Inecuaciones con Valor Absoluto

Las inecuaciones con valor absoluto involucran expresiones dentro de barras $|\cdot|$ y representan distancias en la recta numérica. Su forma general es:

$$|P(x)| \leqslant a \qquad |P(x)| \geqslant a \qquad |P(x)| < a \qquad |P(x)| > a$$

Para resolverlas, usamos la definición del valor absoluto, que genera dos casos basados en las propiedades clave:

Inecuaciones con Valor Absoluto

Pasos para Resolver Inecuaciones Cuadráticas:

1. **Identificar el tipo** de desigualdad (menor/mayor que)
2. **Transformar** según las propiedades del valor absoluto.
   a. Para $|P(x)| < a$ o $|P(x)| \leq a$ → $-a < P(x) < a$ o $-a \leq P(x) \leq a$
   b. Para $|P(x)| > a$ o $|P(x)| \geq a$ → $P(x) < -a$ y $P(x) > a$ o $P(x) \leq -a$ y $P(x) \geq a$
3. **Resolver** las desigualdades resultantes.
4. **Combinar soluciones:**
   a. **Intersección** ($\cap$) para desigualdades "menor que o menor igual que"
   b. **Unión** ($\cup$) para desigualdades "mayor que o mayor igual que"

Álgebra y Funciones

Ejemplo 1: Desigualdad "Menor Que"

Resolver:

$$|2x - 1| < 3$$

Paso 1: Transformar

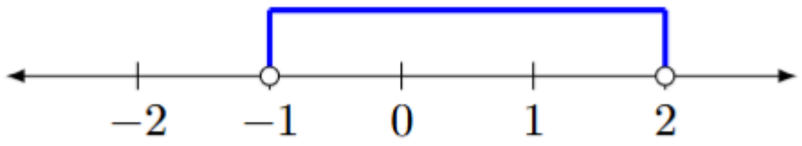
$$-3 < 2x - 1 < 3$$

Paso 2: Resolver

$$\begin{aligned} -3 < 2x - 1 &< 3 \\ -2 < 2x &< 4 \\ -1 < x &< 2 \end{aligned}$$

Solución

$$x \in (-1, 2)$$



Ejemplo 2: Desigualdad "Mayor Que"

Resolver:

$$|x+2| \geq 5$$

Paso 1: Transformar

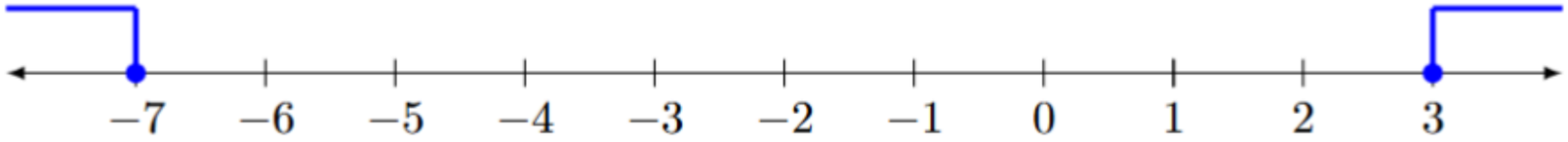
$$x+2 \leq -5 \quad \text{o} \quad x+2 \geq 5$$

Paso 2: Resolver

$$\begin{aligned} x+2 &\leq -5 \\ x &\leq -7 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x+2 &\geq 5 \\ x &\geq 3 \end{aligned}$$

Solución

$$x \in (-\infty, -7] \cup [3, +\infty)$$



¡Muchas gracias por su atención!

Ejemplo

6) ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ en los números reales?

[PSU 2007]

a) $[2, +\infty[$

b) $[-2, +\infty[$

c) $[0, +\infty[$

d) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

e) $[4, +\infty[$

Ejemplo

6) ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ en los números reales?

[PSU 2007]

a) $[2, +\infty[$

b) $[-2, +\infty[$

c) $[0, +\infty[$

d) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

e) $[4, +\infty[$

Ejemplo

9) ¿Cuál es el conjunto de todos los números que están a una distancia mayor que 6 de 0 y a una distancia menor que 20 de 8? **[PSU 2008]**

a) $]6, 8[$

b) $]6, 28[$

c) $]-12, -6[\cup]6, 28[$

d) $]-\infty, 28[$

e) $]-\infty, -12[\cup]-6, 6[\cup]28, +\infty[$

Ejemplo

9) ¿Cuál es el conjunto de todos los números que están a una distancia mayor que 6 de 0 y a una distancia menor que 20 de 8? **[PSU 2008]**

a) $]6, 8[$

b) $]6, 28[$

c) $]-12, -6[\cup]6, 28[$

d) $]-\infty, 28[$

e) $]-\infty, -12[\cup]-6, 6[\cup]28, +\infty[$

Ejemplo

Ejemplo

Ejemplo