Guía N°11 (M2)

<< Inecuaciones Lineales >>

NOMBRE: _____

I. Introducción

Las **expresiones algebraicas** son combinaciones de números, variables y operaciones matemáticas, como la suma, resta, multiplicación y división. Se representan mediante símbolos y letras, donde los números se consideran constantes y las letras representan variables, es decir, valores que pueden variar.

Producto Notable	**Fórmula**
Binomio al cuadrado	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Binomio al cubo	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Producto de binomios con término común (caso simple)	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
Producto de binomios con término común (caso general)	$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Factorización	**Fórmula General**
Factor Común	$ab + ac = a(b+c)$
Agrupación	$ab + ac + db + dc = (a+d)(b+c)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Trinomio $x^2 + bx + c$	$x^2 + (m+n)x + mn = (x+m)(x+n)$
Trinomio $ax^2 + bx + c$	$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$
Factor Por Signo	$-a - b = -(a+b)$

II. Inecuaciones Lineales

Definición

En matemáticas, una **desigualdad** o **inecuación** es una expresión que indica que una cantidad es mayor, menor, mayor o igual, o menor o igual que otra. Se representan con los siguientes símbolos:

- $P < Q$: P es menor que Q.
- $P > Q$: P es mayor que Q.
- $P \leq Q$: P es menor o igual que Q.
- $P \geq Q$: P es mayor o igual que Q.

Propiedades de las Desigualdades

Las desigualdades siguen reglas precisas que permiten manipularlas algebraicamente. A continuación, se presentan las propiedades fundamentales:

1. Ley de Tricotomía

Para dos números reales a y b, siempre se cumple una y solo una de estas relaciones:

$$a > b, \quad a < b, \quad a = b.$$

Ejemplo: Para $a = 3$ y $b = 5$, solo $3 < 5$ es verdadera.

2. Propiedad Transitiva

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

$$a > b \land b > c \Rightarrow a > c.$$

Ejemplo: Si $10 > 5$ y $5 > 2$ implica $10 > 2$.

3. Propiedad Aditiva

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ para cualquier c.

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c.$$

Ejemplo: Si $7 > 4$ implica $7 + 2 > 4 + 2$ (es decir, $9 > 6$).

4. Suma de Desigualdades

Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.

$$a > b \land \quad c > d \Rightarrow a + c > b + d.$$

Ejemplo: Si $6 > 2$ y $5 > 1$ implica $6 + 5 > 2 + 1$ ($11 > 3$).

5. Multiplicación por un Positivo

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.

$$a > b \land c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c.$$

Ejemplo: Si $8 > 3$ y $c = 2$ implica $16 > 6$.

6. Multiplicación por un Negativo

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$ (el signo se invierte).

$$a > b \land c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Ejemplo: Si $4 > 1$ y $c = -2$ implica $-8 < -2$.

7. Multiplicación de Desigualdades Positivas

Si $a > b$, $c > d$, y $b, d > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot d$.

$$a > b \land c > d \land b > 0 \land d > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d.$$

Ejemplo: Si $5 > 2$ y $4 > 3$ implica $20 > 6$.

8. Desigualdad Absoluta

Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

$$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0.$$

Ejemplo: $(-3)^2 = 9 > 0$ y $2^2 = 4 > 0$.

9. Inverso de un Positivo

Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$.

$$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0.$$

Ejemplo: Si $a = 5 > 0$ implica $\frac{1}{5} > 0$.

10. Inversos en Desigualdades

Si $a > b > 0$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

$$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

Ejemplo: Si $10 > 2 > 0$ implica $\frac{1}{10} < \frac{1}{2}$.

11. Potencias en Desigualdades Positivas

Si $a > b > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $a^n > b^n$.

$$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n.$$

Ejemplo: Si $3 > 2$ implica $3^2 > 2^2$ ($9 > 4$).

Inecuaciones de Primer Grado

Las inecuaciones de primer grado son desigualdades algebraicas que pueden expresarse en las siguientes formas generales:

$$ax + b \leq 0, \quad ax + b < 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b > 0$$

Donde a y b son números reales con $a \neq 0$. A diferencia de las ecuaciones, estas desigualdades tienen infinitas soluciones que forman intervalos en los números reales.

Método de Resolución

Para resolver inecuaciones lineales, seguimos estos pasos:

1. Aislar la variable x en un miembro de la desigualdad
2. Simplificar la expresión aplicando operaciones algebraicas
3. Invertir el sentido de la desigualdad si multiplicamos o dividimos por un número negativo
4. Expresar la solución como intervalo

Ejemplo

Resolver la inecuación:

$$-2x + 5 \geq 11$$

Solución:

$$\begin{aligned} -2x + 5 &\geq 11 \\ -2x &\geq 6 \\ x &\leq -3 \quad \text{(Se invierte la desigualdad al dividir por -2)} \end{aligned}$$

La solución es todos los números reales menores o iguales que -3, es decir:

$$x \in (-\infty, -3]$$

Sistemas de Inecuaciones Lineales

Un sistema de inecuaciones lineales consiste en dos o más desigualdades con la misma variable. La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada inecuación individual.

Método de Resolución

1. Resolver cada inecuación por separado
2. Encontrar los valores comunes a todas las soluciones
3. Representar gráficamente en la recta numérica

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\left|\begin{array}{ll} 3x - 7 & \leq 5 \\ 9 - 2x & \geq -6 - x \\ -x + 1 & < x + 1 \end{array}\right.$$

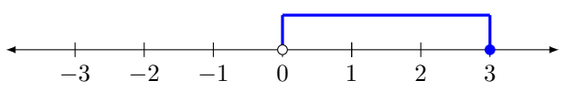
$$\begin{aligned} 3x - 7 &\leq 5 \\ 3x &\leq 12 \\ x &\leq 4 \\ \boxed{x \leq 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 - 2x &\geq 6 - x \\ -2x + x &\geq 6 - 9 \\ -x &\geq -3 \\ x &\leq 3 \\ \boxed{x \leq 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + 1 &< x + 1 \\ -x - x &< 1 - 1 \\ -2x &< 0 \\ x &> 0 \\ \boxed{x > 0} \end{aligned}$$

Solución del sistema:
La solución es la intersección de los tres intervalos obtenidos:

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \leq 3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 3 \Rightarrow x \in (0, 3]$$



Inecuaciones de Dos Factores

Las **inecuaciones cuadráticas de dos factores** son desigualdades que pueden expresarse como producto de dos factores lineales:

$$(x+a)(x+b) \leq 0 \quad \text{o} \quad (x+a)(x+b) \geq 0$$

$$(x+a)(x+b) < 0 \quad \text{o} \quad (x+a)(x+b) > 0$$

Método de Resolución

1. **Factorizar** la expresión cuadrática (si no está factorizada)
2. **Hallar puntos críticos**: Igualar cada factor a cero
3. **Determinar intervalos** entre las raíces
4. **Analizar el signo** del producto en cada intervalo
5. **Seleccionar solución** según la desigualdad

Ejemplo Resuelto

Resolver la inecuación:

$$(x+2)(x-3) \leq 0$$

Paso 1: Puntos críticos

$$(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$
$$(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

Paso 2: Intervalos

Los puntos críticos dividen la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 3), \quad (3, +\infty)$$

Paso 3: Tabla de signos

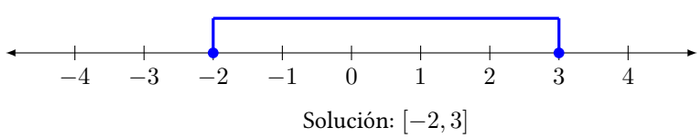
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
Producto	$+$	$-$	$+$

Paso 4: Solución

Para ≤ 0 (valores negativos o cero), seleccionamos:

$$x \in [-2, 3]$$

Representación Gráfica



Solución: $[-2, 3]$

Inecuaciones Fraccionarias Algebraicas

Las **inecuaciones fraccionarias** son desigualdades que involucran cocientes de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \quad \text{o} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

Método de Resolución

1. **Reescribir** la desigualdad con un lado igual a cero
2. **Hallar puntos críticos**: Raíces del numerador y denominador
3. **Determinar intervalos** entre los puntos críticos
4. **Analizar el signo** del cociente en cada intervalo
5. **Seleccionar solución** según la desigualdad, excluyendo las raíces del denominador

Ejemplo Resuelto

Resolver la inecuación:

$$\frac{3x}{x-1} \geq 2$$

Paso 1: Reescribir la desigualdad

$$\frac{3x}{x-1} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{3x - 2(x-1)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} \geq 0$$

Paso 2: Puntos críticos

$(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$

$(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$ (Excluido, hace cero el denominador)

Paso 3: Intervalos

Los puntos críticos dividen la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, -2], \quad (-2, 1), \quad (1, +\infty)$$

Paso 4: Tabla de signos

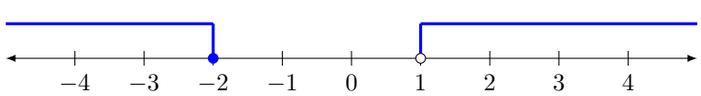
	$(-\infty, -2]$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
Cociente	$+$	$-$	$+$

Paso 5: Solución

Para ≥ 0 (valores positivos o cero), seleccionamos:

$$x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$$

Representación Gráfica



Solución: $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

Inecuaciones con Valor Absoluto

Las **inecuaciones con valor absoluto** son desigualdades que involucran expresiones dentro de barras de valor absoluto $|\cdot|$ y pueden expresarse en las formas:

$$|P(x)| \leq a, \quad |P(x)| \geq a, \quad |P(x)| < a, \quad |P(x)| > a$$

Método de Resolución

1. **Identificar el tipo** de desigualdad (menor/mayor que)
2. **Transformar** según las propiedades del valor absoluto:
   - Para $|P(x)| < a$ o $|P(x)| \leq a$: $-a < P(x) < a$
   - Para $|P(x)| > a$ o $|P(x)| \geq a$: $P(x) < -a$ **o** $P(x) > a$
3. **Resolver** las desigualdades resultantes
4. **Combinar soluciones**:
   - Intersección ($\cap$) para desigualdades "menor que"
   - Unión ($\cup$) para desigualdades "mayor que"

Ejemplo 1: Desigualdad "Menor Que"

Resolver:

$$|2x - 1| < 3$$

Paso 1: Transformar

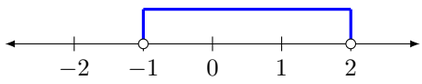
$$-3 < 2x - 1 < 3$$

Paso 2: Resolver

$$\begin{aligned} -3 < 2x - 1 < 3 \\ -2 < 2x < 4 \\ -1 < x < 2 \end{aligned}$$

Solución

$$x \in (-1, 2)$$



Ejemplo 2: Desigualdad "Mayor Que"

Resolver:

$$|x + 2| \geq 5$$

Paso 1: Transformar

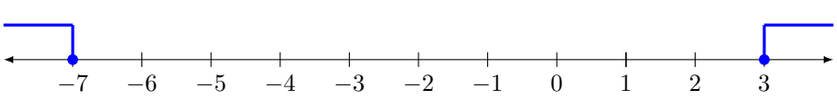
$$x + 2 \leq -5 \quad \text{o} \quad x + 2 \geq 5$$

Paso 2: Resolver

$$\begin{aligned} x + 2 &\leq -5 \\ x &\leq -7 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x + 2 &\geq 5 \\ x &\geq 3 \end{aligned}$$

Solución

$$x \in (-\infty, -7] \cup [3, +\infty)$$



III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) ¿Cuál de las siguientes inecuaciones posee(n) como conjunto solución al intervalo $]1, +\infty[$?

I) $x + 2 > 3$
II) $2(x - 1) < 3x - 3$
III) $\frac{-x}{2} + 1 < \frac{1}{2}$

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III

2) El intervalo solución de la inecuación $\frac{3 - 2x}{2} + 1 \leq \frac{2x}{3}$ es

a) $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$
b) $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$
c) $\left]-\infty, \frac{15}{2}\right[$
d) $[1, +\infty[$
e) $\left[\frac{6}{5}, +\infty\right[$

3) ¿Cuál de las siguientes expresiones representa(n) el conjunto solución de la inecuación $3(-x + 3) < 12$?

I) $x > -3$
II) $]-1, +\infty[$
III) $-1 < x$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo II y III
e) Ninguna de ellas

4) Si $(x + 3)(x - 7) \geq 4(1 - x)$, entonces ¿ cuál de los siguientes intervalos corresponde al conjunto de todos los valores que puede tomar x?

a) $]-\infty, -5[$
b) $]-5, +5[$
c) $]5, +\infty[$
d) $]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$
e) $]-5, +\infty[$

5) Se puede determinar el conjunto solución para x en la inecuación $2(x + 1) \leq m + 1$, con m un número entero, si:

(1) $3m - 6 > 3$
(2) $2m - 5 < 7$

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

6) "Un número x aumentado en 5 es mayor que el doble de x disminuido en dos". El conjunto de **todos** los números que cumplen con dicha condición es

a) $x < 7$
b) $x > \dfrac{-2}{3}$
c) $x < 6$
d) $x > \dfrac{-1}{3}$
e) $x < 3$

7) ¿Cuál es el menor número entero x para el cual se cumple que la diferencia entre el doble de x y el antecesor de x, en ese orden, es mayor que la diferencia entre -5 y el sucesor de x, en ese orden?

a) -4
b) -6
c) -3
d) -2
e) -5

8) El conjunto de todos los números que están a 3 o más unidades y a 5 o menos unidades de 7 en la recta numérica es

a) $[2,4] \cup [10,12]$
b) $]-\infty,2] \cup [12,+\infty[$
c) $]-\infty,4] \cup [10,+\infty[$
d) $[2,12]$
e) $[4,10]$

9) Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$. El intervalo solución para x en el sistema de inecuaciones $\left|\begin{array}{c} bx + a < b \\ ax + b > a \end{array}\right.$ es

a) $\left]-\infty, \dfrac{b-a}{b}\right[$
b) $\left]\dfrac{a-b}{a}, \dfrac{b-a}{b}\right[$
c) $\left]\dfrac{a-b}{a}, +\infty\right[$
d) $\left]\dfrac{b-a}{b}, +\infty\right[$
e) $\left]-\infty, \dfrac{a-b}{a}\right[$

10) El conjunto solución del sistema $\left|\begin{array}{c} 4x + 7 > 3 \\ 5 \leq x + 3 \end{array}\right.$ es

a) $[2,+\infty[$
b) $]-1,+\infty[$
c) $]-1,2[$
d) $]-\infty,-1[$
e) ϕ

IV. Ejercicios tipo PAES

11) Si $-4 \leq x \leq 2$ y $3 \leq y \leq 8$, entonces ¿cuál de las siguientes desigualdades es la correcta?

a) $1 \leq x + y \leq 10$
b) $1 \leq x - y \leq 6$
c) $-7 \leq x - y \leq -6$
d) $-12 \leq x - y \leq -1$
e) $-4 \leq x + y \leq 5$

12) El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$ en los números reales es

a) $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$
b) $[\frac{1}{2}, +\infty[$
c) $]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$
d) $[\frac{1}{2}, +\infty[$
e) ϕ

13) El conjunto solución de $(x+5)(x+2^2) - (x-2)(x-5^0) > -2^2$ es

a) $\left\{x \in R / x > -\frac{7}{3}\right\}$
b) $\left\{x \in R / x > -\frac{11}{6}\right\}$
c) $\left\{x \in R / x > -\frac{8}{3}\right\}$
d) $\left\{x \in R / x > -\frac{7}{6}\right\}$
e) $\left\{x \in R / x > -\frac{13}{3}\right\}$

14) Al resolver la inecuación $\left|1 - \frac{4}{3}x\right| \geq 3$ se obtiene como solución

a) $[3, +\infty[$
b) $]-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [3, +\infty[$
c) $]-\frac{3}{2}, +\infty[$
d) $]-\infty, -\frac{3}{2}]$
e) ϕ

15) En los números reales la solución de la inecuación $4x^2 + 9 < 12x$ es

a) $]-\infty, \frac{3}{2}]$
b) $]\frac{3}{2}, +\infty[$
c) $]2, 3[$
d) IR
e) ϕ

16) La solución del siguiente sistema está dada por el intervalo

$$\begin{array}{rcl} 9x + 2 & \geq & 7x - 4 \\ \frac{10}{14}x - \frac{9}{6} & < & \frac{14}{4} \\ x & > & 2x - 3 \end{array}$$

a) $]-\infty, 7[$
b) $]-\infty, 3[$
c) $]-7, -3]$
d) $[-3, 7[$
e) $[-3, 3[$

17) Dada la inecuación $-m < 4 - 5x$ para la incógnita x en el conjunto de los números reales. ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $m = 6$, entonces $x < 2$.
II) Si $m = 5x$, entonces la solución son todos los números reales.
III) Si $m = -4$, entonces no hay solución en los números reales.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) I, II y III

18) Para los números reales a, b y c, se cumple que $a \cdot b < c$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)?

I) $b^2 < c^2$.
II) Si $c = 0$, entonces $a < 0$.
III) Si $c \neq 0$, entonces $\dfrac{a \cdot b}{c} < 1$.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) Ninguna de ellas es siempre verdadera.

19) Se puede determinar que N es un número natural si se sabe que:

(1) En la recta numérica, la distancia de N a cero es de 1 unidad.
(2) El número N no es menor que su cuadrado.

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

20) Se puede afirmar que que $\dfrac{p}{q} < -1$ si se sabe que:

(1) $p < -1$ y $0 < q < 1$.
(2) $|p| > 1$ y $|q| < 1$.

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional