Guía N°12 (M2)

<< Figuras Geométricas >>

NOMBRE: _____

I. Introducción

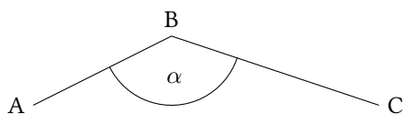
Se debe tener en cuenta que los dibujos que aparecen en la "PAES" son solo referenciales y por lo tanto cualquier dato que no sea aportado explícitamente por la figura o por el enunciado, o deducido a través de la información dada no es correcto. Así mismo, debemos recordar que la única información que se puede considerar en las figuras sin que sea dicha explícitamente, es que las gráficas están hechas en un sistema perpendicular de ejes.

Geometría

La geometría (del griego geo: "tierra" y metría: "medida") es una rama fundamental de las matemáticas que estudia las propiedades, relaciones y medidas de puntos, líneas, ángulos, superficies y sólidos

Ángulos

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos "rayos" (o lados) que tienen un origen común (o vértice común). Es decir, el ángulo indica la posición de uno de los rayos respecto al otro.



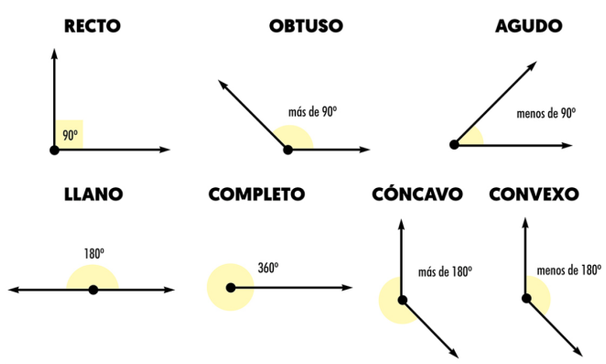
Ejemplo: En la figura, el ángulo $\alpha = \angle ABC$ está formado por la unión de los rayos BA y BC, cuyo origen común es el punto B, que es el vértice del ángulo.

Medición de los ángulos

El sistema fundamental para la medición de ángulos es el **Sistema Sexagesimal**, en el cual la unidad es el grado sexagesimal (°) y una circunferencia completa equivale a $360°$ y sus submúltiplos:

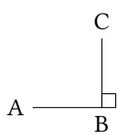
- **Minuto (')**: Corresponde a la $\frac{1}{60}$ parte del grado, así $60' = 1°$
- **Segundo (")**: Corresponde a la $\frac{1}{60}$ parte del minuto, así $60'' = 1'$ y $3600'' = 60' = 1°$

Tipos de ángulos



Ángulos rectos y colinealidad

Si un ángulo ABC es recto, entonces sus lados (BA) y (BC) son perpendiculares y se anota $(BA) \perp (BC)$.



Diremos que tres puntos del plano A, B y C son colineales, si y solo si el ángulo formado por ellos es extendido ($180°$) o bien, que pertenecen a una misma recta.

$$\angle ABC = 180° \Rightarrow A, B \text{ y } C \text{ colineales}$$

$$\overline{\text{A} \qquad \text{B} \qquad \text{C}}$$

Tipos de ángulos especiales

Ángulos adyacentes

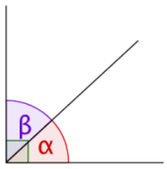
Dos ángulos son adyacentes si y solo si tienen en común el vértice y un lado, y sus regiones interiores no se intersectan:

Ángulos complementarios

Dos ángulos son complementarios cuando:

$$\alpha + \beta = 90°$$

El complemento de un ángulo α es $90° - \alpha$.

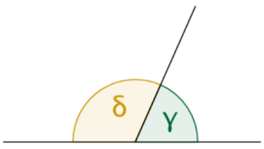


Ángulos suplementarios

Dos ángulos son suplementarios cuando:

$$\alpha + \beta = 180°$$

El suplemento de un ángulo α es $180° - \alpha$.

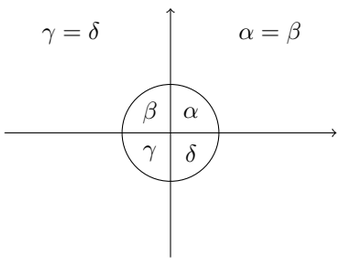


Ángulos Opuestos por el Vértice

Definición y propiedades

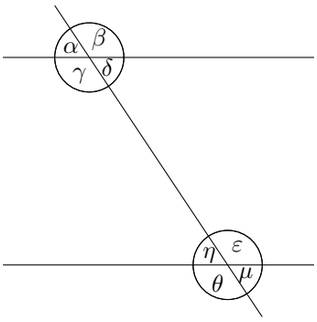
Los ángulos opuestos por el vértice son aquellos ángulos tales que:

- Los lados de uno son las prolongaciones de los lados del otro
- Se forman por la intersección de dos rectas
- Son congruentes (tienen igual medida)



Con recta transversal

Cuando tenemos una recta transversal L_3 que corta a otras dos rectas L_1 y L_2, se forman pares de ángulos opuestos por el vértice adicionales:

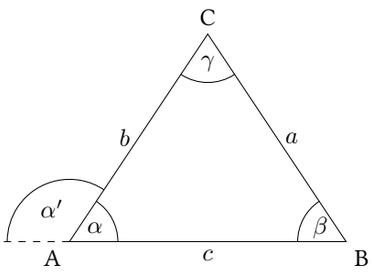


$$\alpha = \varepsilon, \quad \beta = \eta$$
$$\gamma = \mu, \quad \delta = \theta$$

II. Figuras Geométricas

Triángulos: Definición y Elementos

Un triángulo es un polígono de tres lados, o equivalentemente, un polígono con tres vértices. Es el polígono más simple y el único que no tiene diagonales.



Elementos del triángulo:

- Vértices: A, B y C
- Lados: AB = c, BC = a, CA = b
- Ángulos interiores: $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$
- Ángulos exteriores: α', β', γ' (correspondientes a cada vértice)

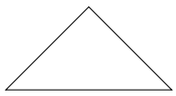
Propiedades Fundamentales

1. **Suma de ángulos interiores:**
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
2. **Suma de ángulos exteriores:**
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$
3. **Ángulo exterior:** Cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes:
$$\alpha' = \beta + \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta$$

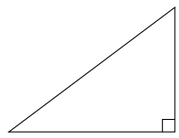
Clasificación de Triángulos

Según sus ángulos

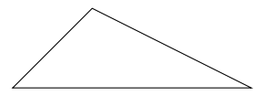
- **Acutángulo:** Todos sus ángulos interiores son agudos ($< 90°$)



- **Rectángulo:** Tiene un ángulo recto ($90°$).

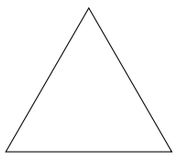


- **Obtusángulo:** Tiene un ángulo obtuso ($> 90°$)

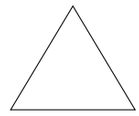


Según sus lados

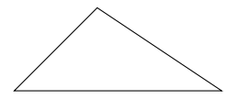
- **Equilátero:** Tres lados iguales, tres ángulos de $60°$



- **Isósceles:** Dos lados iguales, dos ángulos iguales (ángulos basales)



- **Escaleno:** Todos los lados y ángulos diferentes



Desigualdades del Triángulo

- **Relación ángulo-lado:** A mayor ángulo se opone mayor lado, y viceversa.
- **Desigualdad triangular:** La suma de dos lados cualesquiera es mayor que el tercer lado:
$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

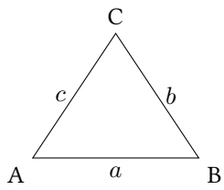
  Si alguna de estas desigualdades no se cumple, el triángulo es **inconstruible**.

Perímetro y Área de Triángulos

Perímetro

El perímetro de un triángulo corresponde a la suma de las longitudes de sus tres lados:

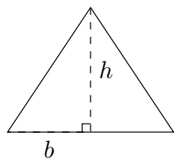
$$P_\Delta = a + b + c$$



Área

El área de un triángulo se calcula como:

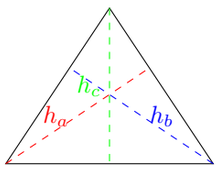
$$A_\Delta = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$



Alturas y Ortocentro

Definición de altura

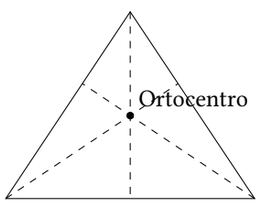
La altura es el segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación). Cada triángulo tiene tres alturas:



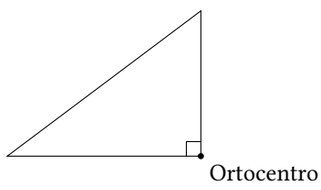
Ortocentro

El ortocentro es el punto de intersección de las tres alturas. Su posición depende del tipo de triángulo:

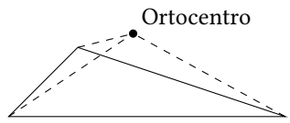
- **Acutángulo:** El ortocentro está dentro del triángulo



- **Rectángulo:** El ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto



- **Obtusángulo:** El ortocentro está fuera del triángulo



Relación entre lados y alturas

Las alturas de un triángulo son inversamente proporcionales a los lados correspondientes:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2A_\Delta$$

Donde A_Δ es el área del triángulo. Esto significa que:

- A mayor lado le corresponde menor altura
- A menor lado le corresponde mayor altura

Cuadriláteros

Un cuadrilátero es un polígono (figura plana, cerrada y delimitada por segmentos de recta) que tiene cuatro lados y cuatro ángulos. Los ángulos interiores suman $360°$ y los ángulos exteriores suman $360°$

Rectas Paralelas

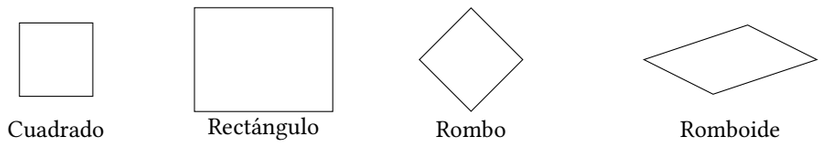
Dos rectas, L_1 y L_2 son paralelas ($L_1 \parallel L_2$) si y solo si están en un mismo plano y nunca se intersectan.

Tipos de Cuadriláteros

1. Paralelogramos

Son cuadriláteros que tienen dos pares de lados opuestos paralelos.

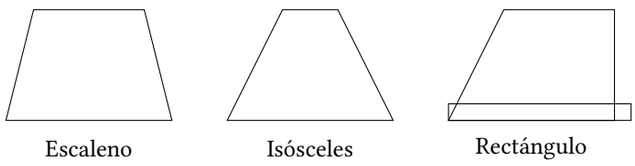
- **Cuadrado:** Tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes
- **Rectángulo:** Tiene cuatro ángulos rectos
- **Rombo:** Tiene cuatro lados congruentes
- **Romboide:** Tiene dos lados adyacentes distintos y ningún ángulo recto



2. Trapecios

Tienen un solo par de lados paralelos (bases).

- **Escaleno:** Lados no paralelos no congruentes
- **Isósceles:** Lados no paralelos congruentes
- **Rectángulo:** Un lado perpendicular a las bases



3. Trapezoides

No tienen lados paralelos.

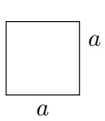
- **Asimétrico:** Sin propiedades especiales
- **Simétrico (Deltoide):** Una diagonal es eje de simetría

Fórmulas de Cuadriláteros

Cuadrado

$$P = 4a$$

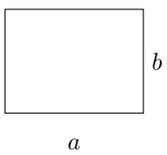
$$A = a^2$$



Rectángulo

$$P = 2a + 2b$$

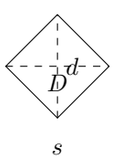
$$A = a \times b$$



Rombo

$$P = 4s$$

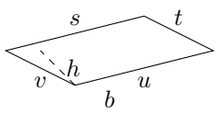
$$A = \frac{D \times d}{2}$$



Romboide

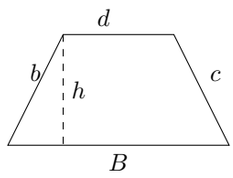
$$P = s + t + u + v$$

$$A = b \times h$$



Trapecio

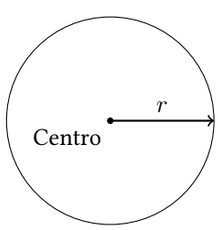
$$P = a + b + c + d$$
$$A = \frac{(B + b)}{2} \times h$$



Circunferencia: Perímetro y Área

Definición

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. La distancia constante se denomina **radio** (r).

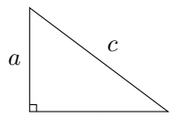


$$P = 2\pi r$$
$$A = \pi r^2$$

Teorema de Pitágoras

Para triángulos rectángulos, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

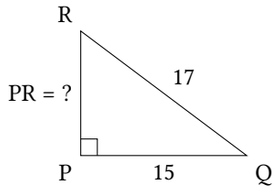
$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$\text{Área } c^2 = \text{Área } a^2 + \text{Área } b^2$$

Enunciado del Problema

Hallar la longitud del cateto PR.



Solución Paso a Paso

Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2$$

Despejamos PR:

$$PR^2 = QR^2 - PQ^2$$
$$PR = \sqrt{QR^2 - PQ^2}$$

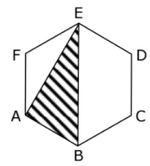
Sustituimos los valores conocidos:

$$PR = \sqrt{17^2 - 15^2}$$
$$PR = \sqrt{289 - 225}$$
$$PR = \sqrt{64}$$
$$PR = 8$$

III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) Si el perímetro del hexágono regular de la figura adjunta es igual a $12a$, entonces el perímetro de la zona achurada es

a) $11a$
b) $(3+\sqrt{3})a$
c) $(2+\sqrt{3})a$
d) $(6+\sqrt{3})a$
e) $(6+2\sqrt{3})a$

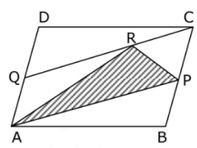


2) Si en un romboide aumenta uno de sus lados de ***3a*** a ***6a*** y la altura ***h*** correspondiente a dicho lado en 4 unidades, la nueva área aumenta en

a) $24a$
b) $(2+24)a$
c) $12a$
d) $3a(h+4)$
e) $3a(h+8)$

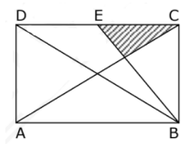
3) En el paralelogramo ABCD de la figura adjunta, **P** y **Q** son puntos medios de los lados respectivos. ¿Qué porcentaje del paralelogramo ABCD es la región achurada?

a) 25%
b) 30%
c) $33,33\%$
d) 40%
e) No se puede determinar



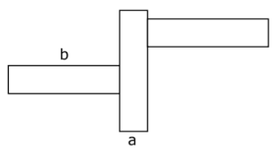
4) Si E es punto medio de CD en el rectángulo ABCD de la figura adjunta, ¿qué fracción del rectángulo ABCD es la región achurada?

a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{8}$
c) $\frac{1}{9}$
d) $\frac{1}{10}$
e) $\frac{1}{12}$



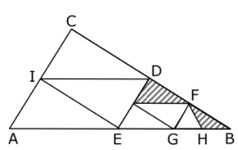
5) En la figura adjunta, los rectángulos son congruentes, en donde a $= \frac{b}{4}$. Entonces, el perímetro de la figura es

a) 30a
b) 26a
c) 24a
d) 18b
e) No se puede determinar



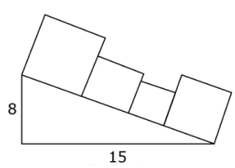
6) En el triángulo ABC de área 32 cm^2 de la figura adjunta, se han trazado sus medianas, en el $\triangle$EBD se trazan nuevamente las medianas y en el $\triangle$GBF se traza la transversal de gravedad FH. ¿Cuánto mide el área achurada?

a) 2 cm^2
b) 2,5 cm^2
c) 3 cm^2
d) 4 cm^2
e) 5 cm^2



7) En la figura adjunta, ¿cuánto suman los perímetros de todos los cuadrados ubicados sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 8 y 15?

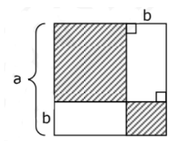
a) 68
b) 51
c) 46
d) 34
e) 17



8) En el cuadrado de lado **a** de la figura adjunta, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) el área de la región achurada?

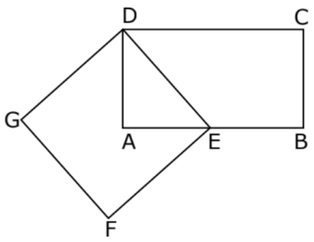
I) $a^2 - b^2$
II) $2b^2 + a^2 - 2ab$
III) $a^2 - 2[b(a+b)]$.

a) Solo II
b) Solo III
c) Solo I y II
d) Solo II y III
e) I, II y III



9) En la figura adjunta, ABCD es un rectángulo, AD = 3 cm, AB = 8 cm y E es punto medio de AB. Si FEDG es un cuadrado, ¿cuál es el perímetro del hexágono BCDGFE?

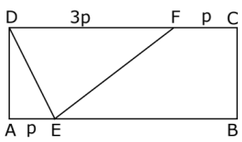
a) 20 cm
b) 22 cm
c) 25 cm
d) 28 cm
e) 30 cm



10) En el rectángulo ABCD de la figura adjunta, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El área de $\triangle$DEF es el triple del área del $\triangle$AED.
II) El área de $\triangle$DEF corresponde a $\frac{3}{8}$ del área del rectángulo ABCD.
III) El área de $\triangle$DEF corresponde a $\frac{3}{4}$ del área del trapecio EBCF.

a) Solo I
b) Solo III
c) Solo I y II
d) Solo II y III
e) I, II y III



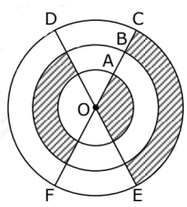
IV. Ejercicios tipo PAES

11) Para elevar volantines se utiliza un carrete circular que tiene 2,7 metros de hilo, el cual equivale a cuatro vueltas y media. Si π = 3, ¿cuál es el diámetro del carrete?

a) 5 cm
b) 10 cm
c) 15 cm
d) 20 cm
e) 30 cm

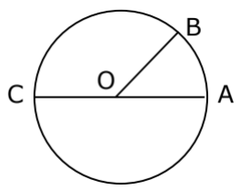
12) La figura adjunta muestra tres circunferencias concéntricas en O. Si el ángulo DOC mide 60°, BC = 6 cm, OA : AB : BC = 1 : 2 : 3, DE y CF diámetros, entonces el área de la región achurada es

a) 8π cm^2
b) 24π cm^2
c) 48π cm^2
d) 72π cm^2
e) 96π cm^2



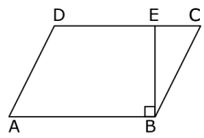
13) En la circunferencia de centro O de la figura adjunta, el diámetro AC mide 120 cm y arco AB : arco BC = 1 : 5. ¿Cuál es el área del sector circular OAB?

a) 150π cm^2
b) 300π cm^2
c) 600π cm^2
d) 720π cm^2
e) 1200π cm^2



14) Si el área del paralelogramo ABCD de la figura adjunta es 52 cm^2 , EC = 4 cm y el ángulo ADC mide 135°, entonces ¿cuál es su perímetro?

a) $(13 + 8\sqrt{2})$ cm
b) $(26 + 8\sqrt{2})$ cm
c) $(28 + 8\sqrt{2})$ cm
d) $(26 + 4\sqrt{2})$ cm
e) $(8 + 4\sqrt{2})$ cm



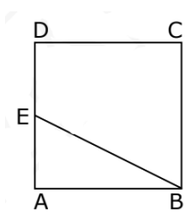
15) Si los lados de un triángulo son: p, $p - q$, $p + q$ y $p > q$, entonces para que este triángulo sea rectángulo se debe cumplir que

a) $p = 4q$
b) $q = 4p$
c) $2q^2 = p^2$
d) $2pq = q^2$
e) $\sqrt{q^2 + p^2} = (p + q)$

16) En la figura adjunta, ABCD es un cuadrado. Se puede determinar el área del trapecio EBCD, si se sabe que:

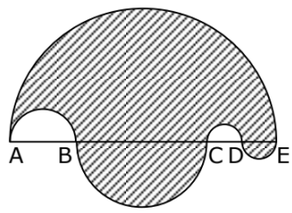
(1) BE = 10
(2) DC = 8

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional



17) En la semicircunferencia de diámetro AE de la figura adjunta, se han dibujado cuatro semicircunferencias. Se puede determinar el perímetro de la región achurada, si se sabe que:

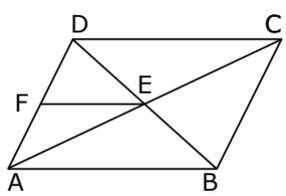
(1) AE = 20 cm
(2) AB : BC : CD : DE = 3 : 5 : 1 : 1



a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

18) Se puede determinar el área del rombo ABCD de la figura adjunta, si se sabe que:

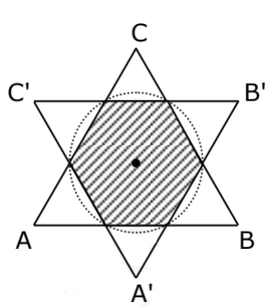
(1) EF // AB y el área del △FED mide 12 cm^2.
(2) AC : BD = 4 : 3 y el perímetro del rombo.



a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

19) En la figura adjunta, △ABC ≅ △A'B'C', ambos son triángulos equiláteros y el polígono achurado es un hexágono regular. Es posible obtener el área del hexágono achurado, si se conoce la medida del segmento:

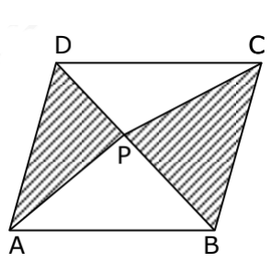
(1) AB
(2) AB'



a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

20) P es un punto cualquiera al interior del cuadrilátero ABCD en la figura adjunta. Se puede saber que porcentaje es la superficie achurada del cuadrilátero ABCD, si se sabe que:

(1) ABCD es un paralelogramo.
(2) ABCD es un rombo de área 60 cm^2.



a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional