Guía N°13 (M2)

<< Cuerpos Geométricos >>

NOMBRE: _____

I. Introducción

Se debe tener en cuenta que los dibujos que aparecen en la "PAES" son solo referenciales y por lo tanto cualquier dato que no sea aportado explícitamente por la figura o por el enunciado, o deducido a través de la información dada no es correcto. Así mismo, debemos recordar que la única información que se puede considerar en las figuras sin que sea dicha explícitamente, es que las gráficas están hechas en un sistema perpendicular de ejes.
La geometría (del griego geo: "tierra" y metría: "medida") es una rama fundamental de las matemáticas que estudia las propiedades, relaciones y medidas de puntos, líneas, ángulos, superficies y sólidos

II. Cuerpos Geométricos

Un cuerpo geométrico es una figura tridimensional que ocupa un lugar en el espacio. Se clasifican en:

1. Poliedros

Cuerpos formados solo por caras planas (polígonos).

- Cubo
- Paralelepípedo
- Prisma
- Pirámide

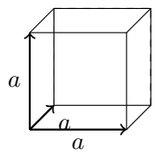
2. Cuerpos Redondos

Cuerpos con al menos una cara curva.

- Esfera
- Cilindro
- Cono

Cubo

Poliedro regular con 6 caras cuadradas, 8 vértices y 12 aristas.



El área es la suma de todas las superficies que lo limitan:

$$A = 6a^2$$

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa:

$$V = a^3$$

Problema 1: Cubo con área 108 cm²

Un cubo tiene área superficial total de 108 cm². Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. La diagonal de la cara superior es $3\sqrt{2}$ cm
2. La diagonal del cubo es $3\sqrt{6}$ cm
3. Su volumen es $54\sqrt{2}$ cm³

Solución

- **Paso 1: Calcular la arista**

$$A = 6a^2 = 108 \implies a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$$

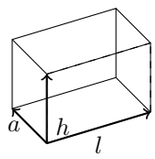
- **Paso 2: Verificar afirmaciones**

1. Diagonal de cara: $a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6\,\text{cm}$ **(Falsa)**
2. Diagonal del cubo: $a\sqrt{3} = 3\sqrt{6}\,\text{cm}$ **(Verdadera)**
3. Volumen: $a^3 = (3\sqrt{2})^3 = 54\sqrt{2}\,\text{cm}^3$ **(Verdadera)**

Respuesta correcta: $\boxed{d)\ \text{Solo II y III}}$

Paralelepípedo

Poliedro con 6 caras (rectangulares o cuadradas), caras opuestas paralelas, 8 vértices y 12 aristas.



El área es la suma de todas las superficies que lo limitan:

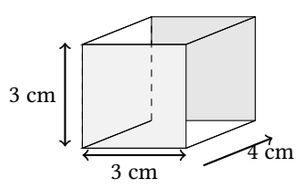
$$A = 2(hl + ha + la)$$

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa:

$$V = h \times l \times a$$

Ejercicio: Volumen de un Paralelepípedo

Un cuadrado de lado 3 cm se traslada 4 cm apoyado sobre uno de sus lados en un plano perpendicular a él. ¿Cuál es el volumen del cuerpo generado?



Solución

El cuerpo generado por la traslación es un **prisma rectangular** (ortoedro) con las siguientes características:

- **Base**: Cuadrado de lado 3 cm

$$\text{Área basal} = 3\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$$

- **Altura**: Distancia de traslación = 4 cm

El volumen de un prisma se calcula mediante la fórmula:

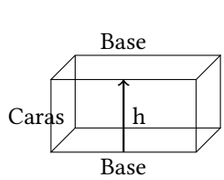
$$V = \text{Área basal} \times \text{Altura}$$

$$V = 9\,\text{cm}^2 \times 4\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^3$$

Respuesta correcta: $\boxed{a)\ 36\,\text{cm}^3}$

Prisma

Es un poliedro compuesto por dos polígonos paralelos y congruentes llamados bases, y paralelógramos que unen las bases denominadas caras laterales.



El área es la suma de todas las superficies que lo limitan:

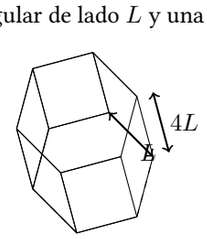
$$A = 2 \cdot \text{área basal} + \text{área caras laterales}$$

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa:

$$V = \text{área basal} \cdot \text{altura}$$

Ejercicio: Volumen de un Prisma Hexagonal Regular

Un prisma recto tiene como base un hexágono regular de lado L y una altura de $4L$. Determine su volumen.



Desarrollo

Paso 1: Calcular el área de la base hexagonal
Un hexágono regular de lado L puede dividirse en 6 triángulos equiláteros de lado L. El área de un triángulo equilátero es:

$$A_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$$

Por lo tanto, el área total del hexágono es:

$$A_{\text{base}} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}L^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$$

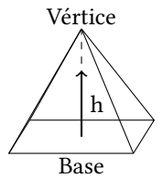
Paso 2: Calcular el volumen del prisma
El volumen de un prisma se obtiene multiplicando el área de la base por la altura:

$$V = A_{\text{base}} \times h = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 \times 4L = 6\sqrt{3}L^3$$

El volumen del prisma hexagonal regular es: $\boxed{a)\, 6L^3\sqrt{3}}$

Pirámide

Es un poliedro compuesto por un polígono llamado base, y caras triangulares que coinciden en un vértice.



El área es la suma de todas las superficies que lo limitan:

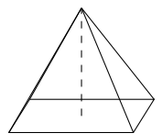
$$A = \text{área basal} + \text{área caras laterales}$$

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{área basal} \cdot \text{altura}$$

Ejercicio: Volumen de una Pirámide Cuadrada

En la figura adjunta, el volumen de la pirámide es $\dfrac{20a^2}{3}$ y el perímetro de su base cuadrada es 8a cm. ¿Cuál es la longitud de la altura de dicha pirámide?



Desarrollo

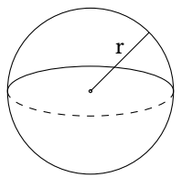
1. **Cálculo del lado de la base:**
$$4L = 8a \Rightarrow L = \frac{8a}{4} = 2a \text{ cm}$$
2. **Área de la base:**
$$A_{\text{base}} = L^2 = (2a)^2 = 4a^2 \text{ cm}^2$$
3. **Aplicación de la fórmula del volumen:**
$$V = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow \frac{20a^2}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot h$$
4. **Despeje de la altura h:**
$$\frac{20a^2}{3} = \frac{4a^2h}{3} \Rightarrow 20a^2 = 4a^2h \Rightarrow h = \frac{20a^2}{4a^2} = 5 \text{ cm}$$

Respuesta final: $\boxed{d)\, 5 \text{ cm}}$

Cuerpos Redondos

Esfera

Es un cuerpo redondo que se genera a partir de la rotación indefinida de un semicírculo en torno a su diámetro.



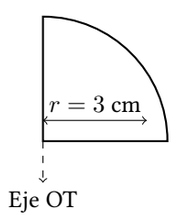
El área es la suma de todas las superficies que lo limitan:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Ejercicio: Volumen de Esfera en revolución



Solución

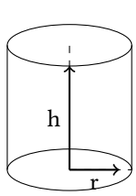
La rotación genera un hemisferio de radio 3 cm:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi(3)^3 = 18\pi \text{ cm}^3$$

Respuesta correcta: $\boxed{e)\ 18\pi \text{ cm}^3}$

Cilindro

Es un cuerpo redondo que se genera a partir de la rotación indefinida de un rectángulo en torno a uno de sus lados.



El área es la suma de todas las superficies que lo limitan:

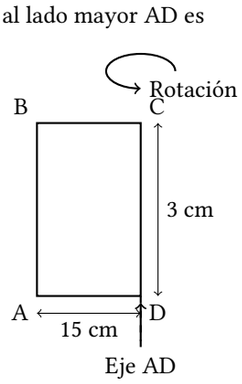
$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejercicio: Volumen del cilindro generado

En la figura adjunta, el cuadrilátero ABCD es un rectángulo de área 45 cm^2 y perímetro 36 cm, entonces el volumen del cilindro generado al rotar el rectángulo respecto al lado mayor AD es



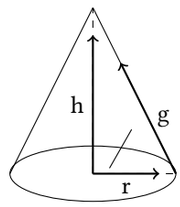
Solución

1. Resolvemos el sistema:
$$\begin{cases} xy = 45 \\ 2(x+y) = 36 \end{cases} \Rightarrow x = 15 \text{ cm}, y = 3 \text{ cm}$$
2. Volumen del cilindro:
$$V = \pi r^2 h = \pi(3)^2 \times 15 = 135\pi \text{ cm}^3$$

Respuesta correcta: $\boxed{a)\ 135\pi \text{ cm}^3}$

Cono

Es un cuerpo redondo que se genera a partir de la rotación indefinida de un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.



El área es la suma de todas las superficies que lo limitan:

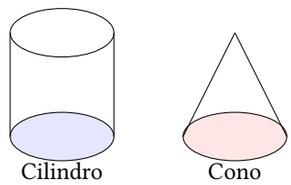
$$A = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejercicio: Comparación cilindro-cono

Si el contenido de un cilindro circular recto con un volumen de 175π cm^3, se vacía en un cono recto de base circular de radio y altura iguales a la del cilindro de la figura adjunta, entonces ¿cuál es la cantidad de líquido que no se alcanza a traspasar?



Solución Detallada

Paso 1: Entender los volúmenes

Para un cilindro y cono con **mismo radio** (r) y **misma altura** (h):

- Volumen del cilindro: $V_{\text{cil}} = \pi r^2 h$
- Volumen del cono: $V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Paso 2: Calcular el volumen del cono

Dado que el cilindro tiene $V_{\text{cil}} = 175\pi$ cm^3, entonces:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \times V_{\text{cil}} = \frac{175\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Paso 3: Determinar el líquido no transferido

La diferencia entre ambos volúmenes es:

$$\text{Líquido no transferido} = V_{\text{cil}} - V_{\text{cono}} = 175\pi - \frac{175\pi}{3} = \frac{350\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Respuesta Final

La cantidad de líquido que no se puede transferir es:

$$\boxed{\frac{350\pi}{3} \text{ cm}^3}$$

Corresponde a la opción $\boxed{e}$.

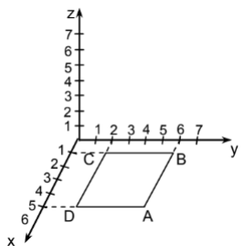
III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) Se tiene un rombo, cuyas diagonales miden 6 cm y 8 cm, el cual se hace rotar indefinidamente en torno a sus diagonales, entonces la razón entre los volúmenes generados es

a) 1:3
b) 3:4
c) 2:3
d) 9:8
e) 27:64

2) Los puntos A, B, C y D de la figura adjunta, son los vértices de la base de una pirámide de base cuadrada. ¿Cuáles son las coordenadas correspondientes al vértice de la cúspide de la pirámide para que su volumen sea 48 cm^3?

a) (3,4,9)
b) (2,1,6)
c) (3,2,9)
d) (3,6,9)
e) (4,9,3))

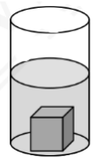


3) Se tiene un barril con capacidad para 20 litros, el cual contiene agua hasta la mitad de su capacidad, si se introducen esferas de acero de 5 cm de radio, ¿cuántas de éstas son necesarias como mínimo para que el barril se llene? (considere π = 3).

a) 20
b) 40
c) 80
d) 160
e) 500

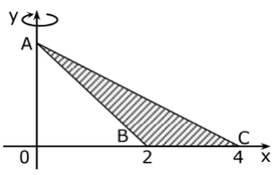
4) Al sumergir completamente un cubo en un tubo cilíndrico de 3 cm de radio, el nivel del agua sube 3 cm, como lo indica la figura adjunta, entonces la medida de la arista del cubo sumergido es (considere π = 3)

a) $\sqrt{6}$ cm
b) $3\sqrt{3}$ cm
c) $\sqrt[3]{6}$ cm
d) $3\sqrt[3]{6}$ cm
e) $3\sqrt[3]{3}$ cm



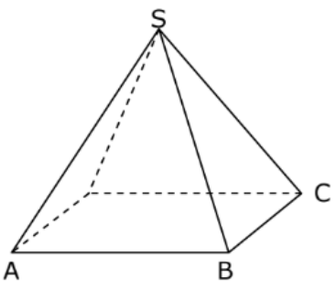
5) La figura adjunta muestra un triángulo ABC obtusángulo de área 24 cm^2 que se gira indefinidamente en torno al eje y, entonces el volumen del cuerpo geométrico generado por el área achurada es

a) 192π cm^3
b) 128π cm^3
c) 124π cm^3
d) 120π cm^3
e) 96π cm^3



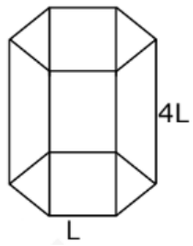
6) La figura adjunta, muestra una pirámide de base cuadrada de lado 6 cm y volumen $12\sqrt{3}$ cm^3, entonces el valor de su apotema es

a) $3\sqrt{3}$ cm
b) $2\sqrt{3}$ cm
c) $3\sqrt{2}$ cm
d) 4 cm
e) 5 cm



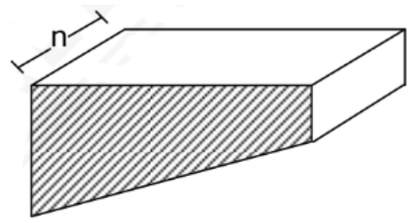
7) En la figura adjunta, se tiene un prisma recto cuya base es un hexágono regular de lado L y altura 4L. ¿Cuál es el volumen del prisma?

a) $6L^3\sqrt{3}$
b) $4L^3$
c) $L^3\sqrt{3}$
d) $\frac{3}{4}L^3\sqrt{3}$
e) $\frac{9}{4}L^3$



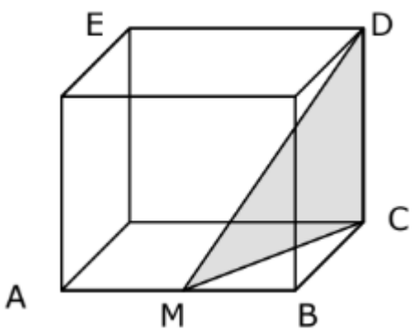
8) La figura adjunta, representa una piscina generada al trasladar **n** metros el trapecio achurado. El largo de la piscina es 8 m y tiene 1,5 m de profundidad mínima y 2,5 m de profundidad máxima. Para que el volumen de la piscina sea 56 m^3 el valor de **n** debe ser

a) $3,5$ m
b) $2,5$ m
c) $1,5$ m
d) $4,0$ m
e) $4,5$ m



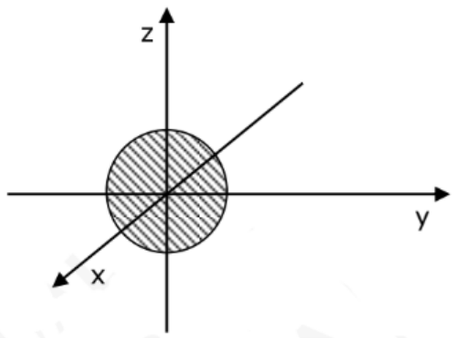
9) La figura adjunta muestra un cubo de área 150 cm^2, donde M es el punto medio de su arista AB, entonces el área del triángulo MCD es

a) $25\sqrt{5}$ cm^2
b) $\frac{25}{4}\sqrt{5}$ cm^2
c) $\frac{25}{2}\sqrt{5}$ cm^2
d) $\frac{25}{2}\sqrt{3}$ cm^2
e) $\frac{25}{4}\sqrt{3}$ cm^2



10) El círculo de centro (0, 0, 0) y radio 6 cm de la figura adjunta está totalmente contenido en el plano yz. Si este círculo se desplaza según el vector (10, 0, 0), entonces el volumen del cuerpo generado por el barrido de este círculo es

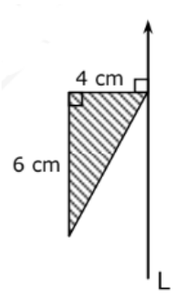
a) 120π cm^3
b) 60π cm^3
c) 360π cm^3
d) 216π cm^3
e) 288π cm^3



IV. Ejercicios tipo PAES

11) ¿Cuál es el volumen del cuerpo que se genera al rotar el triángulo achurado de la figura adjunta, en torno a la recta L? (π = 3)

a) 198 cm^3
b) 192 cm^3
c) 96 cm^3
d) 24 cm^3
e) 12 cm^3



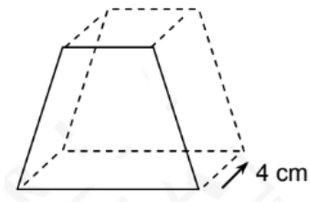
12) Un triángulo isósceles rectángulo de cateto a se hace girar indefinidamente entorno a uno de sus catetos, entonces el área del manto del cuerpo generado es

a) $a^2\pi$
b) $2a^2\pi$
c) $a^2\sqrt{s}$
d) $a^3\pi$
e) $a^2\sqrt{2}\pi$

13) El trapecio isósceles de área $10\sqrt{3}$ cm^2 y altura $2\sqrt{3}$ cm cuya base menor es de 4 cm, se desplaza 4 cm, generando el prisma que muestra la figura adjunta, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

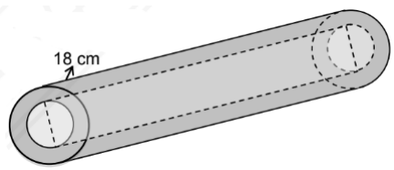
I) El área total del prisma es $(40 + 10\sqrt{3} + 8\sqrt{13})$ cm^2.
II) La base mayor del trapecio vale 6 cm.
III) El volumen del prisma es $40\sqrt{3}$ cm^3.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo II y III
e) I, II y III



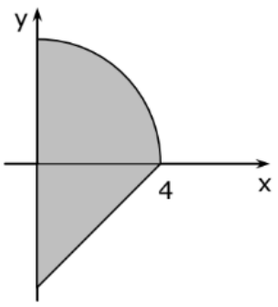
14) En la figura adjunta, al cilindro de radio 10 cm y de largo 30 cm, se le ha hecho un orificio en el centro del cilindro con un diámetro de 18 cm, en toda su extensión. ¿Cuál es el volumen del cuerpo cilíndrico resultante?

a) 98π cm^3
b) 570π cm^3
c) 702π cm^3
d) 800π cm^3
e) 1502π cm^3



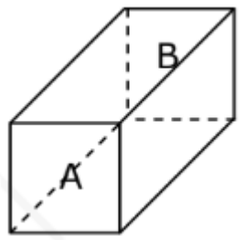
15) En la figura adjunta se muestra un cuarto de circunferencia y un triángulo rectángulo isósceles, que se hace girar indefinidamente en torno al eje y, entonces el volumen del cuerpo generado es

a) 192π
b) 128π
c) 96π
d) 64π
e) 32π



16) Las caras A y B de la caja de la figura adjunta son cuadradas y el resto son rectangulares. El volumen de la caja se puede determinar, si se sabe que:

(1) El área de una de las caras cuadradas es de 36 cm^2.
(2) El perímetro de una de las caras rectangulares es de 32 cm.



a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

17) El área del manto del cono, se puede determinar, si se conoce:

(1) La generatriz del cono.
(2) La razón entre la generatriz y el radio.

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

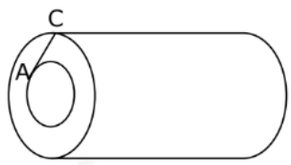
18) Se puede determinar el área total de un paralelepipedo, si:

(1) Tiene su base cuadrada.
(2) Se conoce el área basal del paralelepípedo.

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

19) En el tubo de la figura adjunta, el segmento AC es tangente en A a la circunferencia interior. Se puede determinar el volumen del tubo, si se sabe que:

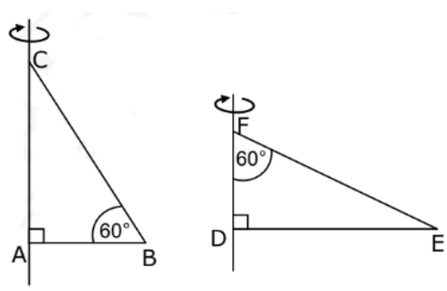
(1) La medida del segmento AC es 5 cm.
(2) El largo del tubo es 80 cm.



a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

20) Se puede determinar la razón entre los volúmenes de los cuerpos generados por los triángulos ABC y DEF de la figura adjunta, al hacerlas girar en torno al eje indicado, si se sabe que:

(1) $\triangle ABC \cong \triangle DFE$
(2) $BC = EF = 2$ cm



a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional