Guía N°14 (M2)

<< Homotecias >>

NOMBRE: _____

I. Introducción

Se debe tener en cuenta que los dibujos que aparecen en la "PAES" son solo referenciales y por lo tanto cualquier dato que no sea aportado explícitamente por la figura o por el enunciado, o deducido a través de la información dada no es correcto. Así mismo, debemos recordar que la única información que se puede considerar en las figuras sin que sea dicha explícitamente, es que las gráficas están hechas en un sistema perpendicular de ejes.
La geometría (del griego geo: "tierra" y metría: "medida") es una rama fundamental de las matemáticas que estudia las propiedades, relaciones y medidas de puntos, líneas, ángulos, superficies y sólidos

II. Figuras Semejantes

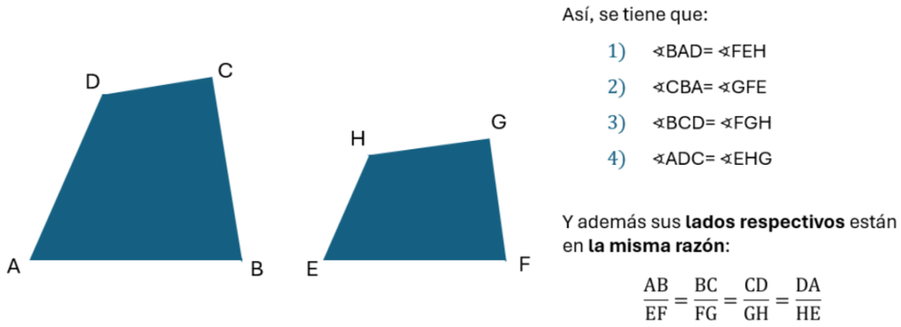
Se dice que dos figuras geométricas son semejantes si ellas tienen la misma forma, aunque no necesariamente igual tamaño. Así, por ejemplo, dos circunferencias serán siempre semejantes pues tienen la misma forma.



Más concretamente, dos polígonos con el mismo número de lados son semejantes (se denota con el símbolo $\sim$) si y solo si, sus ángulos correspondientes son iguales (tienen la misma forma) y sus lados correspondientes son proporcionales (tiene tamaño distinto).

Ejemplo

Si en la figura, los cuadriláteros ABCD y EFGH son semejantes, entonces la relación se anota escribiendo los vértices correspondientes en el mismo orden en que se da la congruencia entre ángulos, es decir, ABCD $\sim$ EFGH.
Así, se tiene que:



Razón de Semejanza

Si dos figuras ABCD y EFGH son semejantes, se llama **razón de semejanza** (k) de la figura al cociente entre la longitud de un segmento de la figura EFGH y la de su homólogo en la figura ABCD.

$$k = \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} \longrightarrow AB = k \cdot EF$$

Perímetro

La razón k le corresponde a todos los elementos lineales de la figura, incluida la razón entre los perímetros.

$$P_{ABCD} = k \cdot P_{EFGH}$$

Área

Pero, la razón entre las áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza k^2.

$$A_{ABCD} = k^2 \cdot A_{EFGH}$$

Criterios de Semejanza de Triángulos

Para establecer la semejanza de dos triángulos basta que se cumpla un mínimo de condiciones, dadas por los Criterios de Semejanza de Triángulos que son:

- Ángulo - Ángulo (A.A.)
- Lado - Ángulo - Lado (L.A.L.)
- Lado - Lado - Lado (L.L.L.)

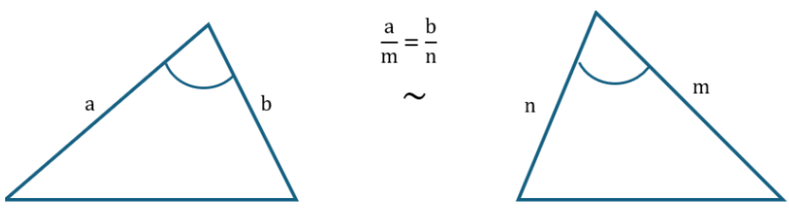
Criterio Ángulo-Ángulo (A.A.)

Si dos ángulos interiores de un triángulo son congruentes con los correspondientes de otro triángulo, entonces dichos triángulos son semejantes.



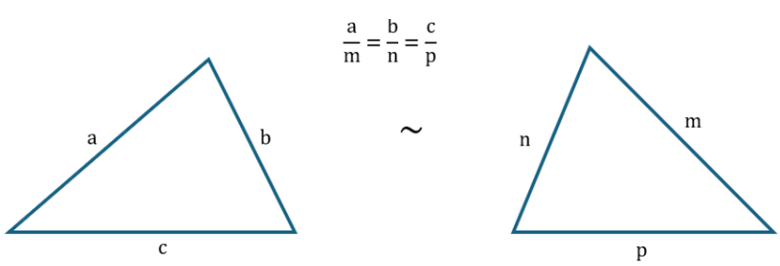
Criterio Lado-Ángulo-Lado (L.A.L.)

Si dos triángulos tienen un par de lados respectivamente proporcionales y los ángulos que forman dichos lados son congruentes, entonces dichos triángulos son semejantes.



Criterio Lado-Lado-Lado (L.L.L.)

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente proporcionales, entonces dichos triángulos son semejantes.



Figuras Congruentes

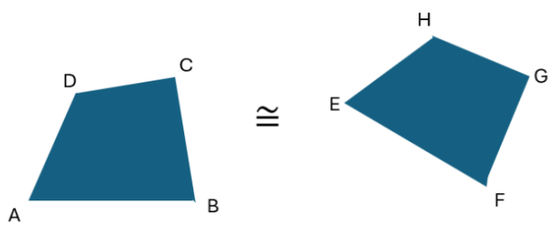
Al hablar de congruencia de figuras nos referimos a aquellas que son exactamente iguales, y por tanto tienen el mismo perímetro y la misma área. Esto es debido a que la congruencia es una semejanza de razón 1. Dos figuras con la misma área se les dice equivalentes, pero dos figuras equivalentes no son necesariamente congruentes.
Más concretamente, dos polígonos con el mismo número de lados son congruentes (se denota con el símbolo ≅) si y solo si:

- Sus ángulos correspondientes son iguales (tienen la misma forma)
- Sus lados correspondientes miden lo mismo (tienen el mismo tamaño)



Ejemplo de Congruencia

Si en la figura, los cuadriláteros ABCD y EFGH son congruentes, entonces la relación se anota escribiendo los vértices correspondientes en el mismo orden en que se da la congruencia entre ángulos, es decir, ABCD ≅ EFGH.



Así, se tiene que:

1) ∢BAD = ∢FEH
2) ∢CBA = ∢GFE
3) ∢BCD = ∢FGH
4) ∢ADC = ∢EHG

Y además sus lados :

$AB = EF; BC = FG; CD = GH; DA = HE$

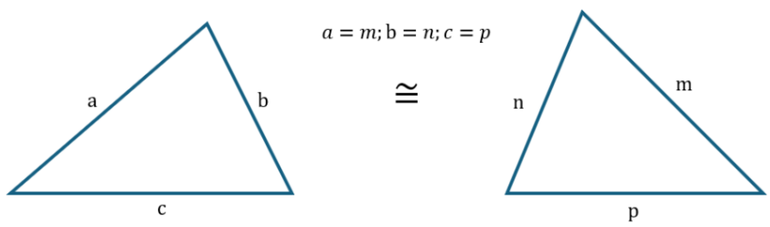
Criterios de Congruencia

Para establecer la congruencia de dos triángulos basta que se cumpla un mínimo de condiciones, dadas por los Criterios de Congruencia de Triángulos que son:

- Lado - Lado - Lado (L.L.L.)
- Lado - Ángulo - Lado (L.A.L.)
- Ángulo - Lado - Ángulo (A.L.A.)

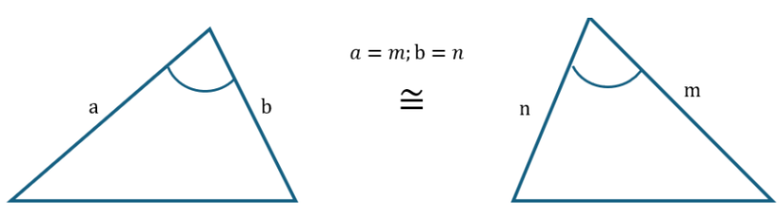
Criterio Lado-Lado-Lado (L.L.L.)

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales, entonces dichos triángulos son congruentes.



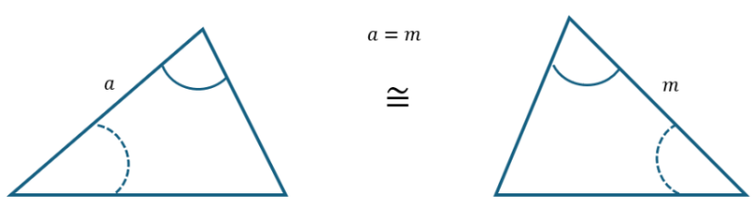
Criterio Lado-Ángulo-Lado (L.A.L.)

Si dos triángulos tienen un par de lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido entre ellos es congruente, entonces dichos triángulos son congruentes.



Criterio Ángulo-Lado-Ángulo (A.L.A.)

Si dos triángulos tienen un lado igual y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente congruentes, entonces dichos triángulos son congruentes.



Homotecia

La homotecia es una transformación geométrica que permite obtener figuras semejantes a partir de una figura geométrica cualquiera. Con esta transformación es posible **ampliar** o **reducir** figuras.

Elementos Fundamentales

Una homotecia se compone de cuatro elementos:

1. La figura original (ejemplo: $\triangle ABC$)
2. El centro de la homotecia (O)
3. La razón de homotecia (k)
4. La figura resultante (ejemplo: $\triangle A'B'C'$)

Propiedades

Al aplicar una homotecia de centro O y razón $k \neq 0$ a un punto P, se obtiene su punto homotético P' que cumple:

- P, O y P' son colineales
- $OP' = k \cdot OP$

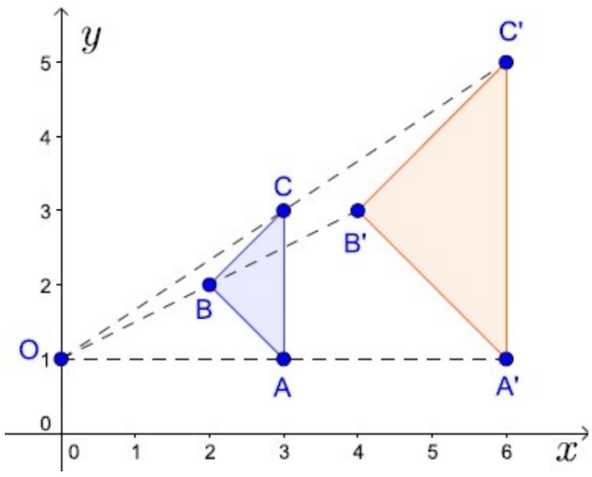
Clasificación por Razón de Homotecia

Homotecia Directa ($k > 0$)

- Si $0 < k < 1$: **Reducción**. La figura resultante está al mismo lado de O que la original.
- Si $k = 1$: **Congruencia**. La figura resultante es idéntica a la original.
- Si $k > 1$: **Ampliación**. La figura resultante está al mismo lado de O que la original.

Homotecia Inversa ($k < 0$)

- Si $-1 < k < 0$: **Reducción**. O se ubica entre ambas figuras.
- Si $k = -1$: **Congruencia**. La figura resultante es idéntica pero invertida.
- Si $k < -1$: **Ampliación**. O se ubica entre ambas figuras.



Notas

- Cuando $|k| > 1$, la figura resultante es una ampliación.
- Cuando $|k| < 1$, la figura resultante es una reducción.
- El signo de k determina la posición relativa respecto al centro O.

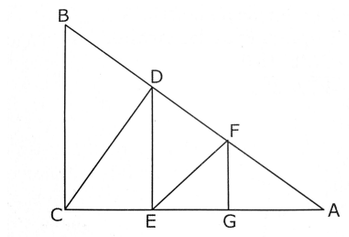
III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**? **[PSU 2010]**

a) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
b) Todos los cuadrados son semejantes.
c) Todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes.
d) Todos los círculos son semejantes.
e) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

2) En la figura, el triángulo ABC es rectángulo en C, los segmentos CD y EF son perpendiculares al segmento AB y los segmentos FG y DE son perpendiculares al segmento AC. ¿Cuál(es) de las siguientes relaciones es (son) verdadera(s)? **[PSU 2012]**

I) $\dfrac{\text{ED}}{\overline{\text{CE}}} = \dfrac{\text{AE}}{\overline{\text{ED}}}$.
II) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$.
III) $\triangle\text{DEC} \sim \triangle\text{FGE}$.



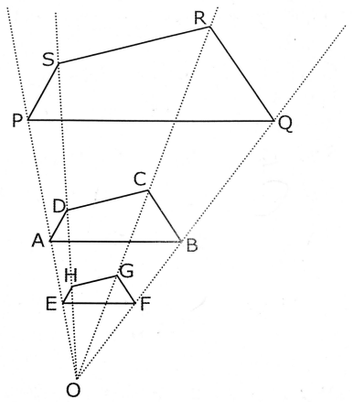
a) Solo I
b) Solo III
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III

3) Un velero tiene dos mástiles verticales a la cubierta. El menor de ellos mide 4 m y proyecta una sombra sobre la cubierta de $2,5$ m y en ese mismo instante, el mástil mayor proyecta una sombra de $7,5$ m. La altura del mástil mayor mide **[PSU 2011]**

a) 9 m.
b) $4,6$ m.
c) 12 m.
d) 8 m.
e) ninguno de los valores anteriores.

4) En la figura se muestran dos homotecias, una de centro O y razón de homotecia 2 que transforma a ABCD en PQRS y la otra de centro O y razón de homotecia 0,5 que transforma a ABCD en EFGH. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)? **[PSU 2014]**

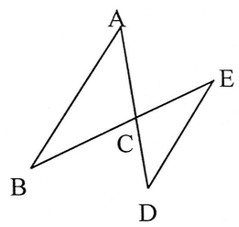
I) Si BQ es igual a 5 cm, entonces BF es igual a 2,5 cm.
II) $\text{OH} = \dfrac{1}{3}\text{SH}$.
III) $\overline{\text{EH}} \,//\, \overline{\text{PS}}$.



a) Solo I
b) Solo III
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) I, II y III

5) ¿En cuál de las figuras se cumple **siempre** la semejanza de los triángulos indicados? **[PSU 2013]**

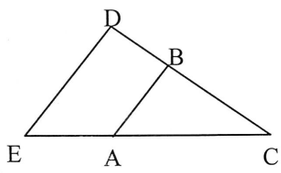
I)



$\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ se intersectan en C y $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$

$\Delta ABC \sim \Delta DEC$

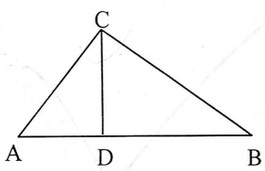
II)



$\overline{AB}$ // $\overline{ED}$, A está en $\overline{EC}$ y B está en $\overline{CD}$

$\Delta ABC \sim \Delta EDC$

III)



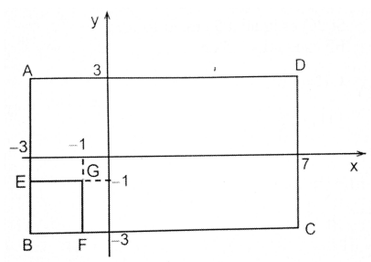
$\overline{AB} \perp \overline{CD}$

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y II
e) I, II y III.

6) Al cuadrado EBFG de la figura adjunta, se le aplica una homotecia de modo que los vértices de la figura resultante no están en el exterior del rectángulo ABCD. Si E pertenece al segmento AB, F pertenece al segmento BC y la figura resultante de la homotecia posee la mayor área bajo estas condiciones, ¿cuál de las siguientes opciones puede representar el centro y la razón de homotecia, respectivamente? **[PSU 2016]**

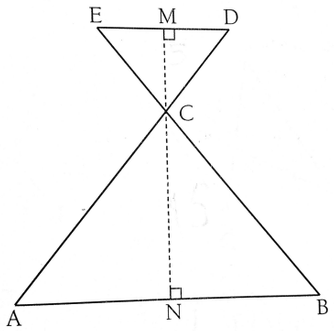
a) G y 2
b) G y 3
c) D y -3
d) B y -6
e) B y 3



7) En la figura adjunta, el triángulo ABC es semejante con el triángulo DEC. Si CM=5, AB=21 y CN=15, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)? **[PSU 2009]**

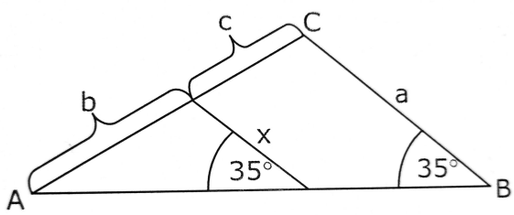
I) CN : AB = CM : ED.
II) Área $\triangle EDC = \frac{35}{2}$.
III) $\frac{\text{Área } \triangle EDC}{\text{Área } \triangle ABC} = \frac{1}{9}$.

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III.



8) En el triángulo ABC de la figura, una expresión que representa a **x** en términos de a, b y c es **[PSU 2013]**

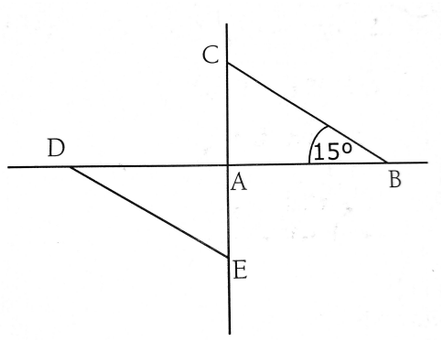
a) $\frac{ab}{c}$
b) $\frac{ca}{b}$
c) $\frac{b(b+c)}{a}$
d) $\frac{ab}{b+c}$
e) ninguna de las anteriores.



9) En la figura, CE y DB son dos rectas que se intersectan perpendicularmente. Se puede determinar que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ si se sabe que: **[PSU 2010]**

(1) $\overline{CB} // \overline{DE}$
(2) $\sphericalangle DEA = 75°$

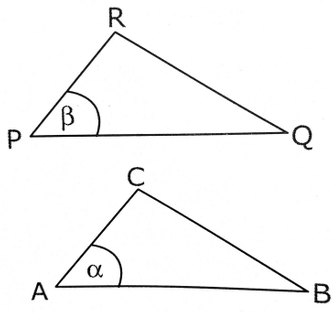
a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional



10) En la figura, se puede determinar que el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle PQR$ si: **[PSU 2012]**

(1) $\alpha = \beta$ y PQ = AB
(2) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

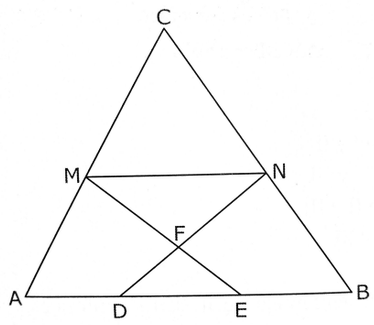


IV. Ejercicios tipo PAES

11) En el triángulo ABC de la figura, los puntos D y E sobre $\overline{AB}$ son tales que AD = DE = EB , si $\overline{MN}$ es una mediana, entonces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

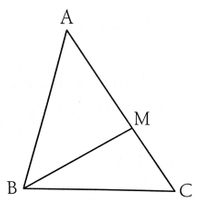
I) $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$
II) $\triangle MNF \sim \triangle EDF$
III) $\frac{MF}{FE} = \frac{3}{2}$

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III.



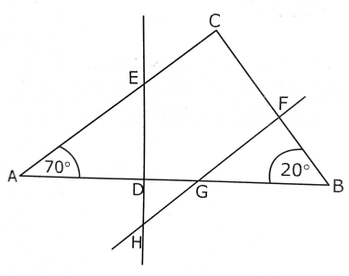
12) En la figura adjunta, $\sphericalangle MBC = \sphericalangle BAC$, AB = 3 cm , BC = 2 cm y AC = 4 cm . Entonces MC =

a) 3 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 12 cm
e) 18 cm



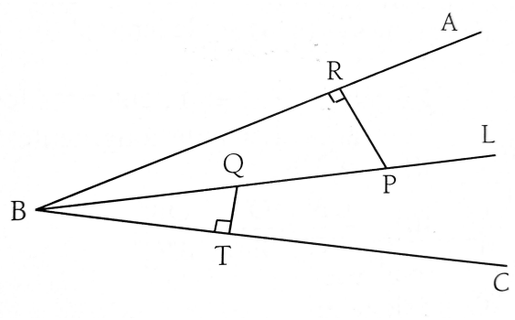
13) En el triángulo ABC de la figura se han trazado las rectas DE y FG, que se intersectan en H, tales que $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{FG} \perp \overline{CB}$. De acuerdo a ello, ¿cuál de las siguientes alternativas es **FALSA**?

a) $\frac{HG}{AE} = \frac{HD}{ED}$
b) $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$
c) $\frac{FB}{DH} = \frac{FG}{HG}$
d) $\frac{FG}{AD} = \frac{FB}{ED}$
e) $\frac{AC}{DG} = \frac{CB}{DH}$



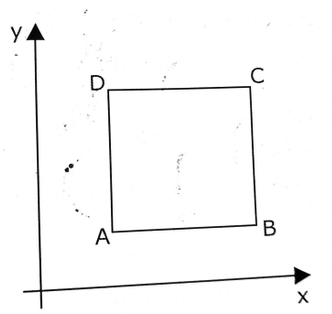
14) En la figura adjunta, L es la bisectriz del ángulo ABC. Si $BP = 2 \cdot BQ$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $PR = 2 \cdot QT$
II) El área del triángulo BTQ es igual a la mitad del área del triángulo BRP.
III) RQ = BQ



a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III.

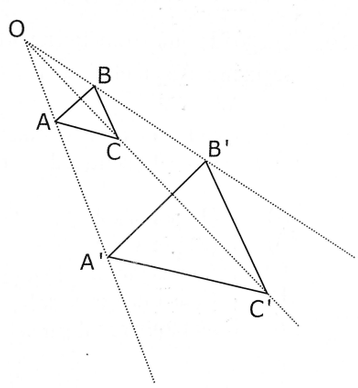
15) El cuadrado ABCD, de lado 8, de la figura adjunta verifica que el lado $\overline{AB}$ es paralelo al eje x. Si el punto A tiene coordenadas $(4, 5)$ y se le aplica una homotecia centrada en el origen y de razón $\frac{2}{7}$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto C' homotético de C luego de aplicar la transformación?



a) $\left(\frac{24}{7}, \frac{26}{7}\right)$
b) $\left(\frac{24}{7}, \frac{10}{7}\right)$
c) $\left(\frac{8}{7}, \frac{10}{7}\right)$
d) $\left(\frac{8}{7}, \frac{26}{7}\right)$
e) No se puede determinar.

16) Al triángulo ABC de la figura adjunta se le aplica una homotecia de razón 5 : 4 y se obtiene su imagen homotética A'B'C'. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **SIEMPRE** verdadera(s)?

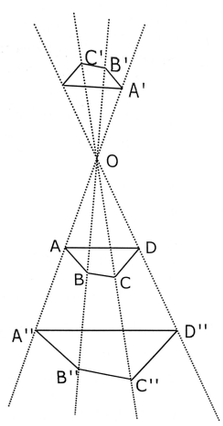
I) $\triangle$ABC $\sim \triangle$A'B'C'
II) Si la recta OC corta al segmento AB en D y al segmento A'B' en D', entonces $\frac{\text{AD}}{\text{DB}} = \frac{\text{A'D'}}{\text{D'B'}}$.
III) $\frac{\text{OC}}{\text{CC'}} = \frac{4}{5}$



a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) Solo II y III.

17) Al cuadrilátero ABCD de la figura adjunta se le aplica una homotecia con centro en O de razón $k_1 < 0$ y se obtiene el cuadrilátero A'B'C'D'. Si a este último cuadrilátero se le aplica una homotecia del mismo centro y de razón $k_2 < 0$, se obtiene el cuadrilátero A"B"C"D". ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **SIEMPRE** verdadera(s)?

I) Si $k_1 = k_2 = -1$, entonces los cuadriláteros no son necesariamente congruentes.
II) $k_1 > k_2$
III) $\frac{\text{OB'}}{\text{B'C'}} = \frac{\text{OB}}{\text{BC}} = \frac{\text{OB"}}{\text{B"C"}}$



a) Solo I
b) Solo III
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) Solo II y III.

18) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

a) Si H_1 y H_2 son imágenes distintas homotéticas de otra figura geométrica F, entonces siempre $H_1 \sim H_2$
b) Si dos figuras geométricas son semejantes, entonces una es siempre la imagen homotéticas de la otra.
c) Si se hace una homotecia a un triángulo cualquiera, con razón de homotecia igual a -3, entonces la razón de los perímetros entre el triángulo y su imagen es $\frac{1}{3}$.
d) Si un cuadrilátero ABCD tiene una imagen homotética APQR, entonces el centro de homotecia es A.
e) Si un polígono P es la imagen homotética de otro polígono Q, entonces todos los lados de Q son paralelos, coincidentes o no, a los lados correspondientes de P.

19) Luego de una transformación geométrica, se puede determinar la longitud de la imagen de un segmento AB en el plano cartesiano, con A(0,6) y B(2,2), si se sabe que:

(1) La transformación es una homotecia de razón k = -4.
(2) El centro de la transformación es A.

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

20) Sobre los lados del cuadrilátero ABCD se han marcado cuatro puntos como lo indica la figura. Es posible afirmar que EFGH es un paralelogramo si se sabe que:

(1) E y F son los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ respectivamente.
(2) $\overline{HG}$ es mediana de $\triangle ACB$ y $\overline{EF}$ es mediana de $\triangle ACD$.

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

