Guía N°15 (M2)

<< Transformaciones Isométricas >>

NOMBRE: _____

I. Introducción

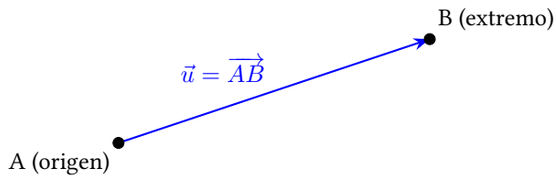
Se debe tener en cuenta que los dibujos que aparecen en la "PAES" son solo referenciales y por lo tanto cualquier dato que no sea aportado explícitamente por la figura o por el enunciado, o deducido a través de la información dada no es correcto. Así mismo, debemos recordar que la única información que se puede considerar en las figuras sin que sea dicha explícitamente, es que las gráficas están hechas en un sistema perpendicular de ejes.

La geometría (del griego geo: "tierra" y metría: "medida") es una rama fundamental de las matemáticas que estudia las propiedades, relaciones y medidas de puntos, líneas, ángulos, superficies y sólidos

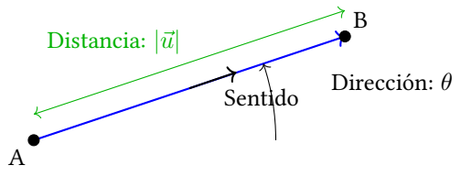
Vectores

En términos generales, un "vector" es un segmento dirigido entre dos puntos llamados "origen" y "extremo" (en este último dibujamos la punta de una "flecha").

- Denotaremos por $\vec{u}$ al vector de origen A y extremo B, que también podemos escribir como $\overrightarrow{AB}$

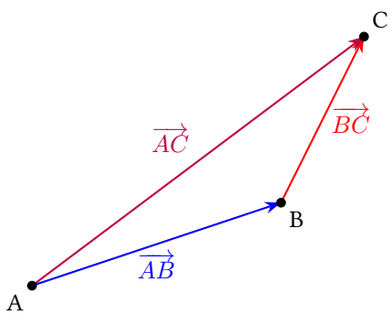


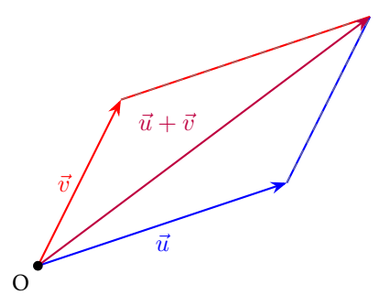
Cada vector se compone por tres elementos principales que son su longitud o norma (**distancia**), que corresponde a su largo, y denotaremos por $\|\vec{u}\|$; su dirección, que corresponde a la dirección (**inclinación**) de la recta que contiene al vector y de todas sus paralelas y su **sentido** que corresponde a la orientación de la flecha.



Suma de Vectores

Si a un objeto situado en un punto A le aplicamos dos desplazamientos sucesivos, digamos $\overrightarrow{AB}$ seguido de $\overrightarrow{BC}$, entonces el desplazamiento resultante es $\overrightarrow{AC}$.





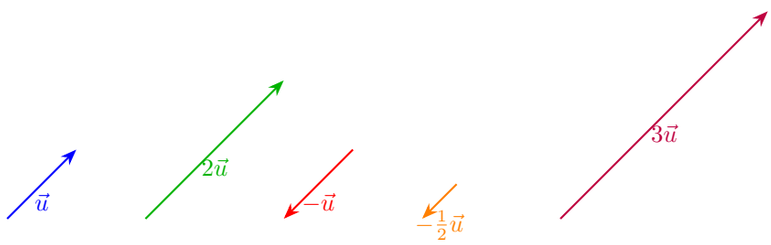
Si se trazan $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con un origen común, entonces $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector que forma la diagonal del paralelógramo definido por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como se muestra en la figura del costado.

Multiplicación de escalar por vector

Se llama producto de un número real k por un vector $\vec{u}$, y se representa por $k \cdot \vec{u}$, al vector que tiene:

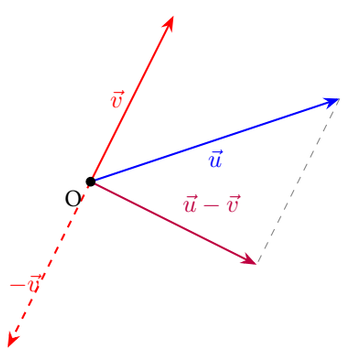
- Dirección: igual a la de $\vec{u}$
- Módulo: igual al de $\vec{u}$ multiplicado por el valor absoluto de k
- Sentido: igual al de $\vec{u}$ si k es positivo, y opuesto al de $\vec{u}$, si k es negativo

$$\vec{u} \quad 2\vec{u} \quad -\vec{u} \quad -\tfrac{1}{2}\vec{u} \quad 3\vec{u}$$



Resta de Vectores

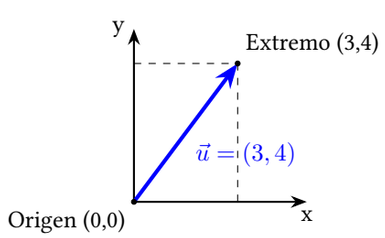
Para obtener $\vec{u} - \vec{v}$ basta construir el vector $-\vec{v}$ y sumárselo a $\vec{u}$.



Vectores en el Plano Cartesiano

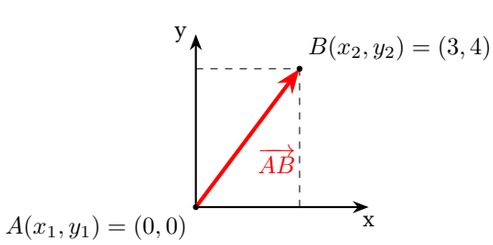
Todo vector en el plano cartesiano se representa mediante coordenadas (x, y). Si no se indica el origen, se asume que es el origen $(0, 0)$ del plano. El vector $\vec{u} = (3, 4)$ tiene:

- Norma (longitud): $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano se calcula mediante el teorema de Pitágoras. El vector distancia entre A y B es $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y su longitud (norma) es la distancia entre los puntos.



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2}$$
$$d = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$
$$d = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

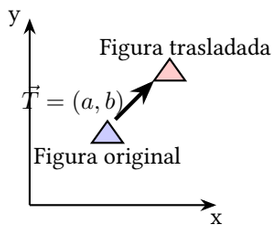
Transformaciones Isométricas

Las isometrías, transformaciones isométricas o movimientos rígidos son transformaciones geométricas, que mantienen la forma y tamaño. Es decir, las figuras originales y las que resultan de aplicarles una isometría son congruentes. Las isometrías son:

1. Traslación en una dirección particular.
2. Reflexión o simetría respecto a una recta o respecto a un punto.
3. Rotación con centro en un punto y en un ángulo dado.

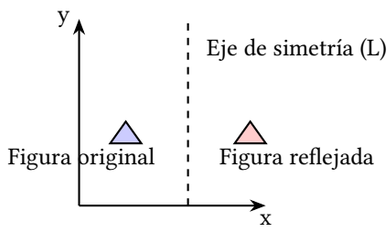
Traslación

La traslación está definida por un vector, por lo tanto, tiene magnitud, dirección y sentido. Al aplicar una traslación T a una figura, todos sus puntos se desplazan la misma distancia en la misma dirección.
Si se aplica $T = (a, b)$, a cada punto (x, y) se transforma en $(x + a, y + b)$.



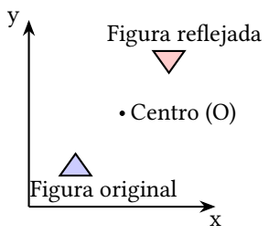
Simetría Lineal

La simetría axial (reflexión) hace corresponder a cada punto de la figura con otro punto de la figura reflejada, de manera perpendicular a una recta fija L (eje), de modo que el segmento entre el punto y su reflejo es dividido en dos partes iguales por L. La reflexión mantiene la misma distancia entre figura y reflexión, y mantiene el ángulo recto.



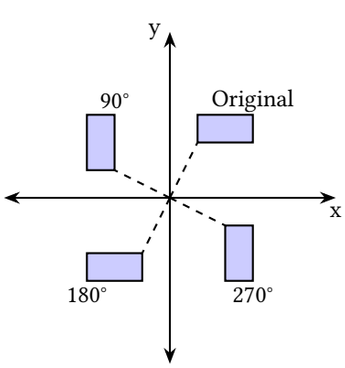
Simetría Central

La simetría central es una simetría respecto de un punto O, llamado centro de simetría. El punto imagen P' de un punto P es tal que la distancia entre P a O y P' a O es la misma, y los tres puntos (P, O, P') están alineados. Es equivalente a una rotación de 180° alrededor del centro O.



Rotación

La rotación es un giro en torno a un punto O (centro de rotación) en un ángulo dado. Las rotaciones con centro en el origen del plano cartesiano. Las transformaciones isométricas mantienen la forma y el tamaño de las figuras.

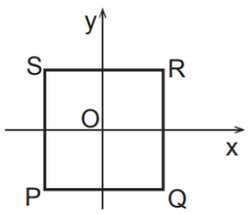


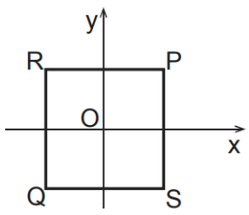
Fórmulas de rotación:

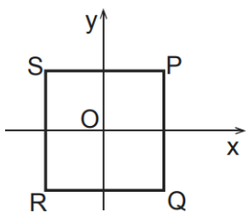
- $P(x, y) \xrightarrow{90^\circ} P'(-y, x)$
- $P(x, y) \xrightarrow{180^\circ} P'(-x, -y)$
- $P(x, y) \xrightarrow{270^\circ} P'(y, -x)$

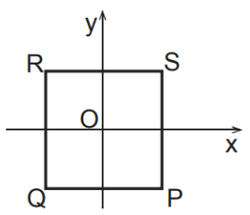
II. Ejercicios de Admisiones pasadas

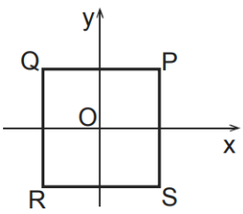
1) Al cuadrado PQRS de la figura, con dos lados paralelos al eje x y centro en el origen O del sistema de ejes coordenados, se le aplica una o varias rotaciones en 90° alrededor del origen o reflexiones con respecto al eje x. ¿En cuál de las siguientes opciones la figura NO puede ser la imagen de PQRS después de aplicar una o varias de estas transformaciones isométricas? **[PSU 2013]**

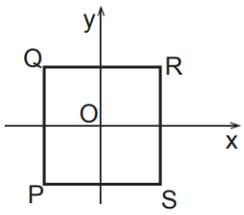


A)


B)


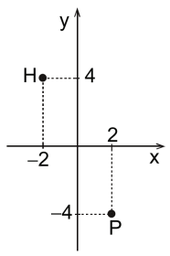
C)


D)


E)


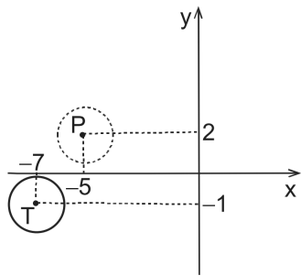
2) En la figura, el punto H se transforma en el punto P si se le aplica una **[PSU 2011]**

a) simetría axial con respecto al eje x.
b) simetría axial con respecto al eje y.
c) traslación según el vector (-2,4).
d) simetría puntual con respecto al origen.
e) traslación según el vector (2,-4).



3) En la figura, la circunferencia de centro T se traslada según un vector a la circunferencia punteada de centro P. ¿Cuáles son las coordenadas del vector de traslación? **[PSU 2013]**

a) (2,3)
b) (-2,3)
c) (-2,-3)
d) (2,-3)
e) (-5,2)



4) ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdaderas? **[PSU 2012]**

I) Los triángulos isósceles tienen un eje de simetría.
II) Los triángulos escalenos no tienen ejes de simetría.
III) Los triángulos equiláteros tienen un centro de simetría.

a) Solo I
b) Solo III
c) Solo I y II
d) Solo II y III
e) Solo II y III.

5) Al punto (6,-4) se le aplica una traslación obteniendo el punto (12,-8). Si al punto (-3,5) se le aplica la misma traslación, entonces se obtiene el punto **[PSU 2014]**

a) (-6,10)
b) (-9,9)
c) (9,-3)
d) (3,1)
e) (6,9)

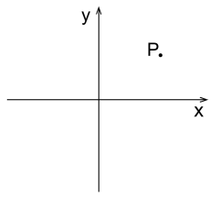
6) Si $\vec{a} = \left(\frac{3}{2}, 6\right)$ y $\vec{b} = \left(-\frac{3}{2}, -6\right)$, entonces $4\vec{a} - 2\vec{b}$ es igual a **[PSU 2013]**

a) (3,0)
b) (9,0)
c) (9,12)
d) (3,12)
e) (9,36)

7) En el sistema de ejes coordenados de la figura se ha ubicado el punto P(a,b). ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)? **[PSU 2010]**

I) El simétrico de P con respecto al eje x es P'(a,-b).
II) El simétrico de P con respecto al origen es P"(-a,-b).
III) El simétrico de P con respecto a un punto en el primer cuadrante es otro punto que está en el primer cuadrante.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) I, II y III.



8) En el sistema de ejes coordenados, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)? **[PSU 2012]**

I) El simétrico de (2,3) con respecto al eje x es (-2,3).
II) El simétrico de (-3,5) con respecto al origen es (3,-5).
III) El simétrico de (3,4) con respecto al eje y es (-3,4)

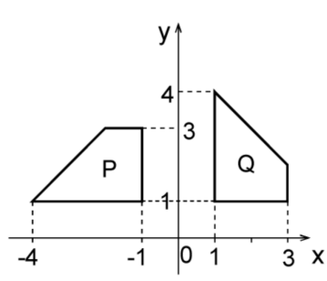
a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo II y III
e) I, II y III.

9) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**? **[PSU 2013]**

a) Un diámetro de una circunferencia es eje de simetría de ella.
b) El punto de intersección de las diagonales de un rombo es centro de simetría de él
c) Las diagonales de un trapecio isósceles son ejes de simetría de él.
d) El punto medio de un trazo es centro de simetría de él.
e) La bisectriz de un ángulo es eje de simetría de él.

10) En la figura, ¿cuál de las siguientes transformaciones rígida permite obtener el polígono P a partir del polígono Q, si las rotaciones se hacen en sentido antihorario? **[PSU 2006]**

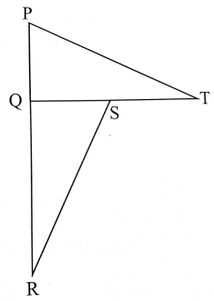
a) Simetría (reflexión) con respecto al eje y.
b) Rotación en 180° con respecto al origen.
c) Reflexión con respecto al eje y, y una rotación en 180° con respecto al origen.
d) Reflexión con respecto al eje x, y una rotación en 180° con respecto al origen.
e) Rotación en 90° con respecto al origen.



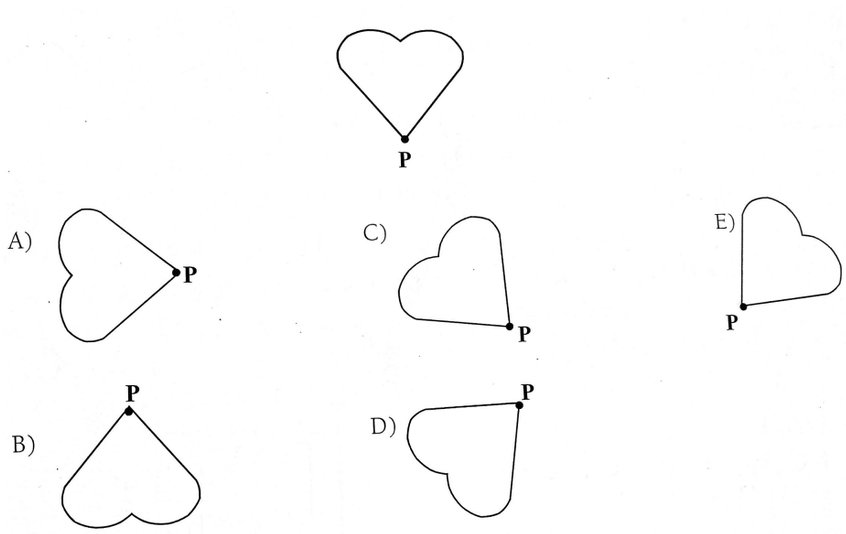
III. Ejercicios tipo PAES

11) En la figura adjunta, el △RSQ se obtuvo al aplicar al △PQT una rotación con centro en el punto

a) P
b) Q
c) R
d) S
e) T

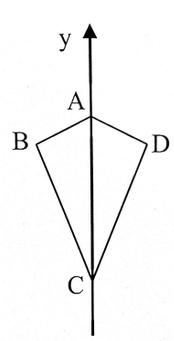


12) ¿Cuál de las siguientes alternativas representa de mejor manera la imagen de la figura adjunta al rotarla en 315° con respecto al punto P?



13) En la figura adjunta, el cuadrilátero ABCD es simétrico con respecto al eje y. Si las coordenadas del puno D son (2,1),¿cuáles son las coordenadas de B?

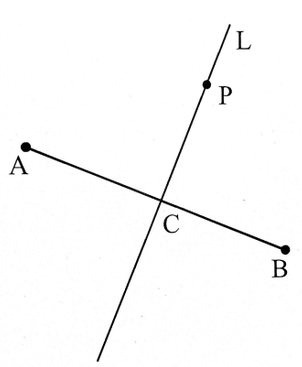
a) (2,-1)
b) (-1,-2)
c) (-2,-1)
d) (-1,2)
e) (-2,1)



14) En la figura adjunta, la recta L es la simetral del trazo $\overline{AB}$ y P es un punto de L. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)?

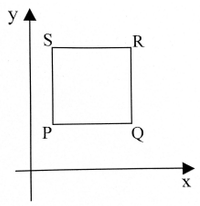
I) AC = CB
II) ∢ACP ≅ ∢BCP
III) △ACP ≅ △BCP

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III.



15) En la figura adjunta, el cuadrado PQRS de lado 5, el lado $\overline{PQ}$ es paralelo al eje x y el punto P tiene coordenadas (1,3). Si se le aplica una simetría con respecto al eje y, seguida una traslación dada por el vector $\vec{v} = (-1, -3)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto R" resultante de aplicar las dos isometrías a R?

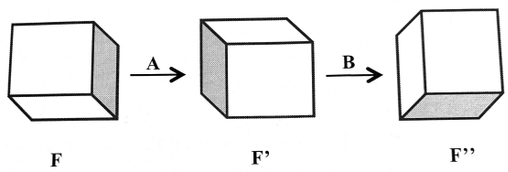
a) (-7,5)
b) (-6,8)
c) (5,-11)
d) (-2,0)
e) (-1,3)



16) Dada la figura plana, se le aplica una isometría A para obtener F' y luego se le aplica una segunda isometría B para obtener F". ¿Cuál(es) de las siguientes opciones representa(n) las isometrías A y B, respectivamente, aplicadas a F?

I) Una simetría axial A seguida de una rotación de 270° en sentido horario.
II) Una rotación A de 180° seguida de una rotación B de 90° en sentido antihorario.
III) Una simetría central A seguida de una rotación B de 270° en sentido horario.

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III.



17) Si al punto P(a,b) en el plano cartesiano se le aplica una reflexión R, es **incorrecto** afirmar que si se hace esta reflexión con respecto

a) al eje x, transforma a P en el punto P'(a,-b).
b) al eje y, transforma a P en el punto P'(-a,b).
c) a la recta y = x, transforma a P en el punto P'(b,a).
d) a la recta y = -x, transforma a P en el punto P'(a,-b).
e) al origen, transforma a P en el punto P'(-a,-b).

18) La traslación $\vec{T} = (-3, 4)$ produce la misma imagen que la aplicación sucesiva de

a) $\vec{t_1} = (2, -1)$ seguida de $\vec{t_2} = (-5, 5)$
b) $\vec{t_1} = (-2, 1)$ seguida de $\vec{t_2} = (5, 5)$
c) $\vec{t_1} = (-2, -1)$ seguida de $\vec{t_2} = (5, 5)$
d) $\vec{t_1} = (3, -1)$ seguida de $\vec{t_2} = (-1, -4)$
e) $\vec{t_1} = (2, -1)$ seguida de $\vec{t_2} = (-5, -5)$

19) Si al triángulo ABC, que es acutángulo e isósceles con base $\overline{AB}$, aplicamos una reflexión respecto del lado $\overline{BC}$, la figura que se forma

I) es un paralelogramo.
II) tiene diagonales perpendiculares.
III) tiene al menos un ángulo obtuso.

¿Cuál(es) de afirmaciones anteriores es (son) siempre verdadera(s)?

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y III
e) Solo II y III

20) Si al punto A(-2,3) se le aplica una reflexión en el eje x, seguida de la traslación dada por el vector $\vec{t} = (-3, -4)$, se obtiene el punto de coordenadas

a) (-1,-7)
b) (-5,-7)
c) (-1,-1)
d) (0,-6)
e) (-6,-2)