CLASE N°12:

“Figuras Geométricas”

Objetivos de la clase:

- Problemas que involucren el teorema de Pitágoras en diversos contextos.
- Perímetro y áreas de triángulos, paralelogramos, trapecios y círculos.
- Problemas que involucren perímetro y áreas de triángulos, paralelogramos, trapecios y círculos en diversos contextos.

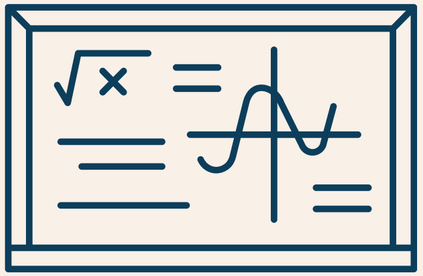
Prueba de Acceso a la Educación Superior

Eje de contenidos de M2:

1. ~~Álgebra y Funciones~~
2. Geometría
3. Números
4. Probabilidad y Estadística

Prueba de Acceso a la Educación Superior

Eje de Geometría



- M2 **FIGURAS GEOMÉTRICAS**
- M2 CUERPOS GEOMÉTRICOS
- M2 TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS
- M2 HOMOTECIAS
- M2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS
- M2 RAZONES EN LA CIRCUNFERENCIA

Reglas de la clase

RITMO DE LA CLASE

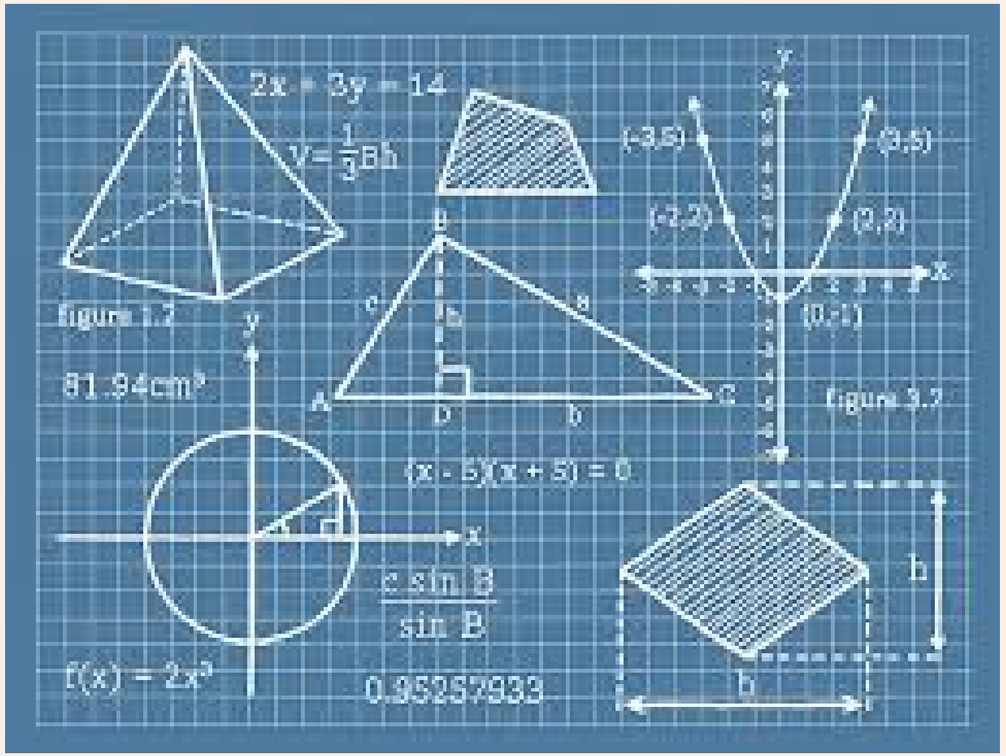
PREGUNTAS EN CLASE

DUDAS AL CORREO

GEOMETRÍA

DEFINICIÓN

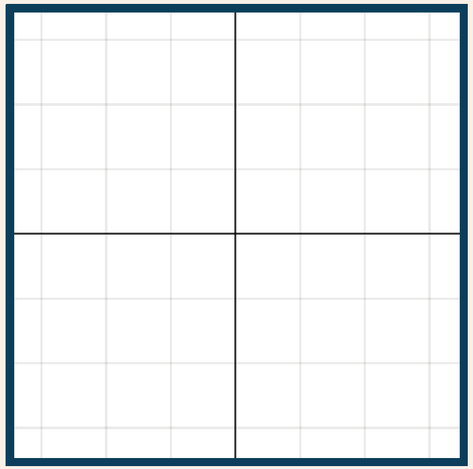
Estudio de las propiedades y relaciones entre puntos, líneas, ángulos, superficies y sólidos,



Geometría

Conceptos básicos

Se debe tener en cuenta que los dibujos que aparecen en la “PAES” son solo referenciales y por lo tanto cualquier dato que no sea aportado explícitamente por la figura o por el enunciado, o deducido a través de la información dada no es correcto. Así mismo, debemos recordar que la única información que se puede considerar en las figuras sin que sea dicha explícitamente, es que las gráficas están hechas en un sistema perpendicular de ejes.

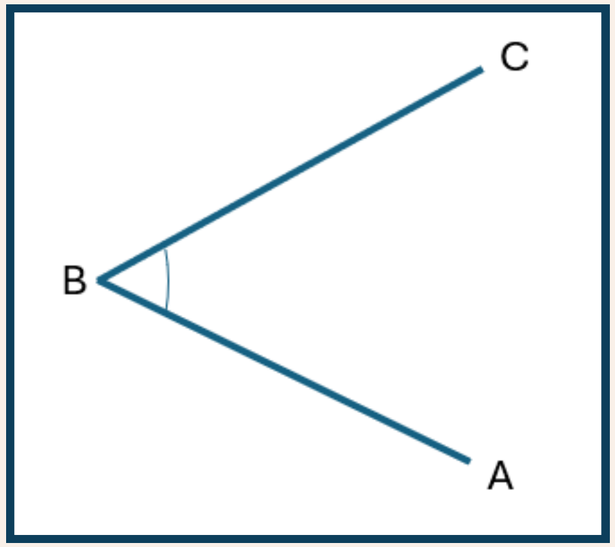


Ángulos

Ángulos

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos “rayos” (o lados) que tienen un origen común (o vértice común). *El ángulo indica la posición de uno de los rayos respecto al otro*

Ejemplo: En la figura, el ángulo está formado por la unión de los rayos BA y BC, cuyo origen común es el punto B, que es el vértice del ángulo.

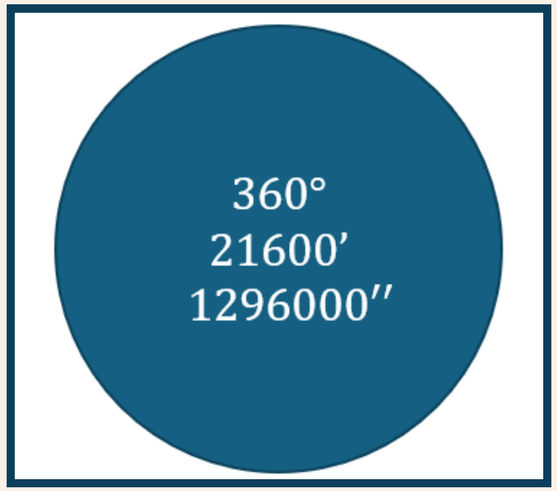


Anotamos ∢ABC, donde siempre la letra de en medio será la letra del vértice.

Medición de los ángulos

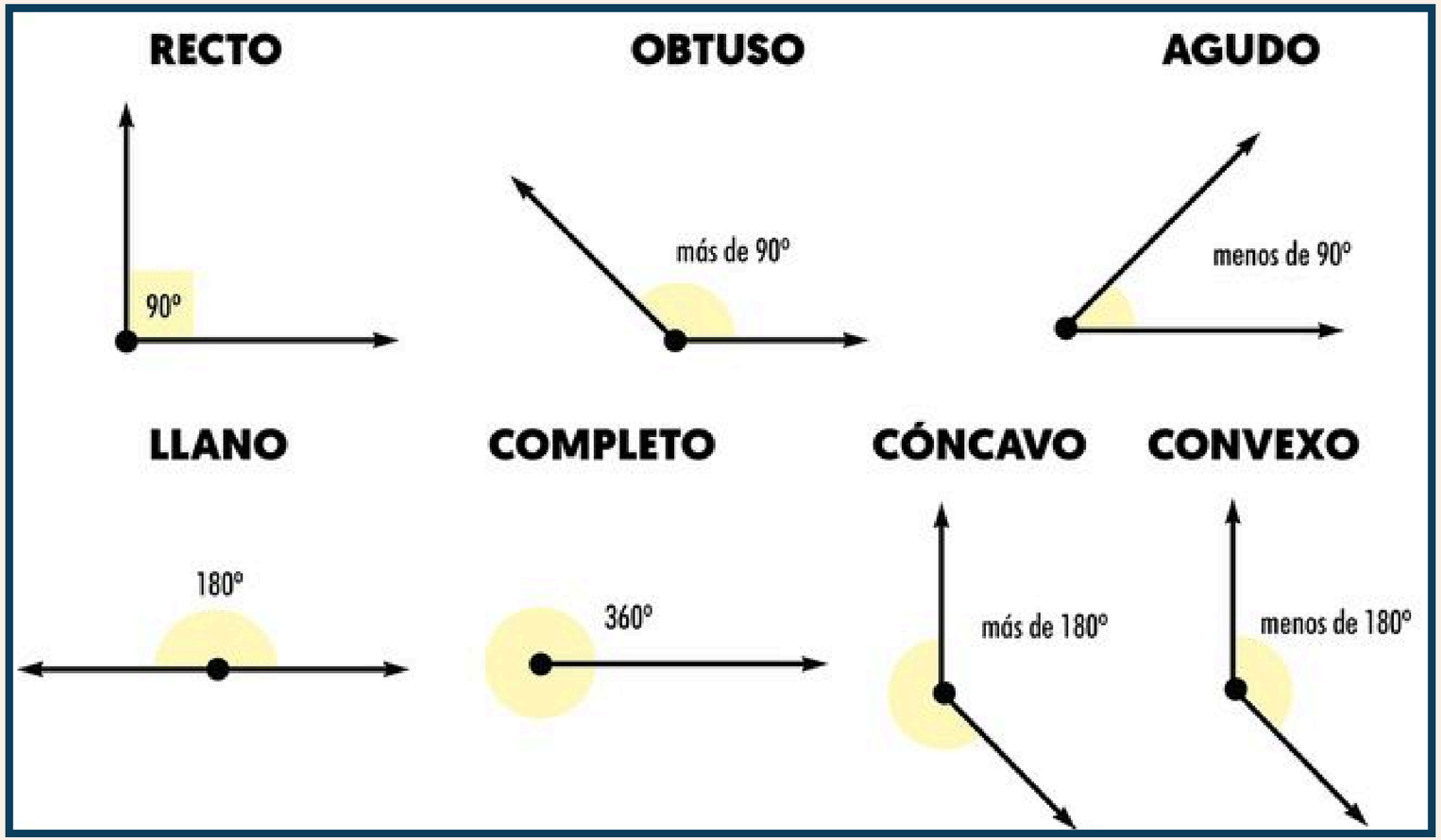
El sistema fundamental para la medición de ángulos es el **Sistema Sexagesimal**, en el cual la unidad es el grado sexagesimal (°) y una circunferencia completa equivale a 360° y sus submúltiplos de grado sexagesimal (°):

- **Minuto (‘):** corresponde a la 1/60 parte del grado, así, 60’=1°.
- **Segundo (“):** corresponde a la 1/60 parte del minuto, así, 60’’=1’ y 3600’’=60’=1°.



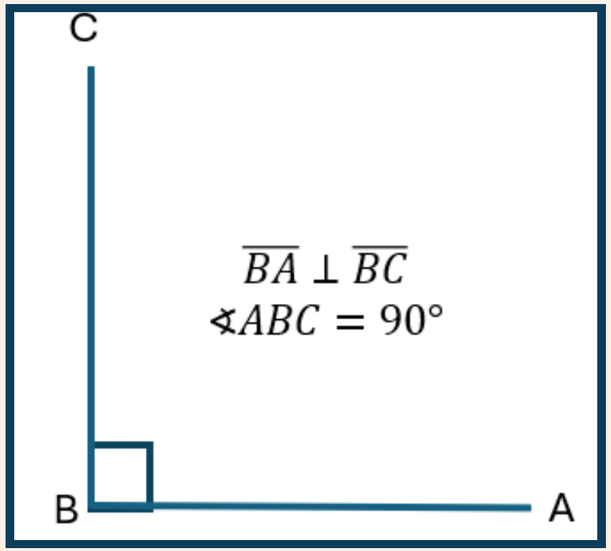
Geometría

Tipos de ángulos

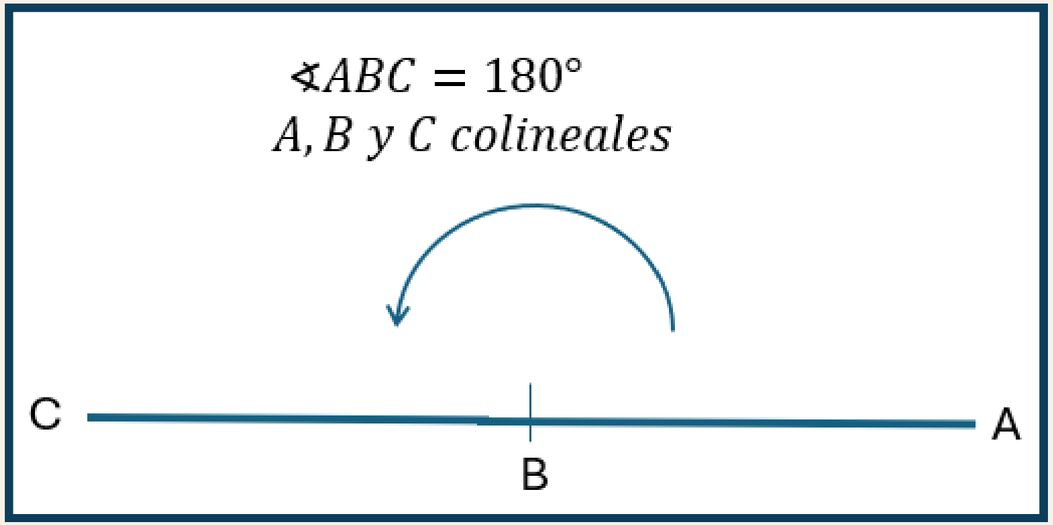


Tipos de ángulos

Si un ángulo ABC es recto, entonces sus lados (BA) y (BC) son perpendiculares y se anota (BA)⊥(BC).



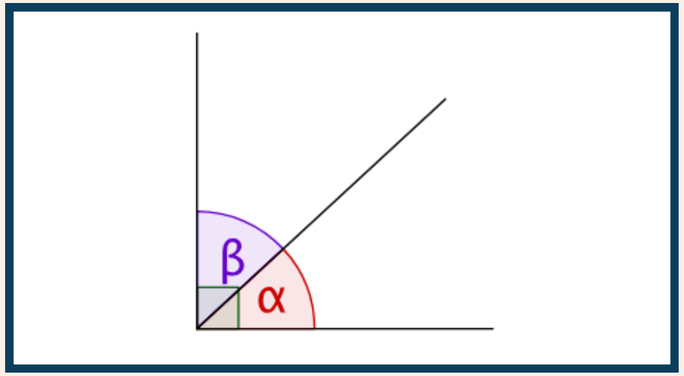
Diremos que tres puntos del plano A, B y C son colineales, si y solo si el ángulo formado por ellos tres es extendido o bien, que pertenecen a una misma recta.



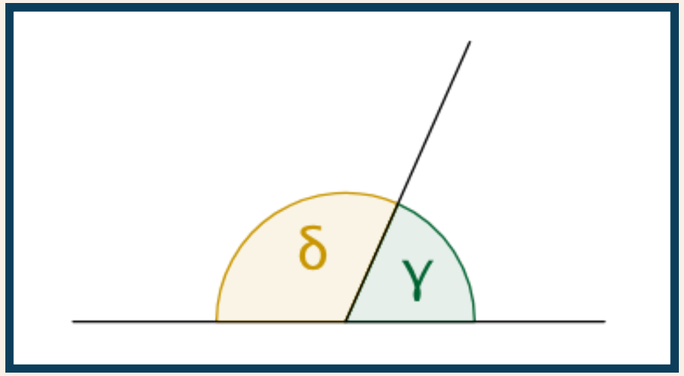
Tipos de ángulos

Ángulos adyacentes: Dos ángulos son adyacentes si y solo si tienen en común el vértice y un lado, y sus regiones interiores no se intersectan, tal como:

Ángulos Complementarios: Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus ángulos es 90°; así, el complemento de un ángulo es aquella medida del ángulo para completar 90°.



Ángulos Suplementarios: Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus ángulos es 180°; así, el complemento de un ángulo es aquella medida del ángulo para completar 180°.



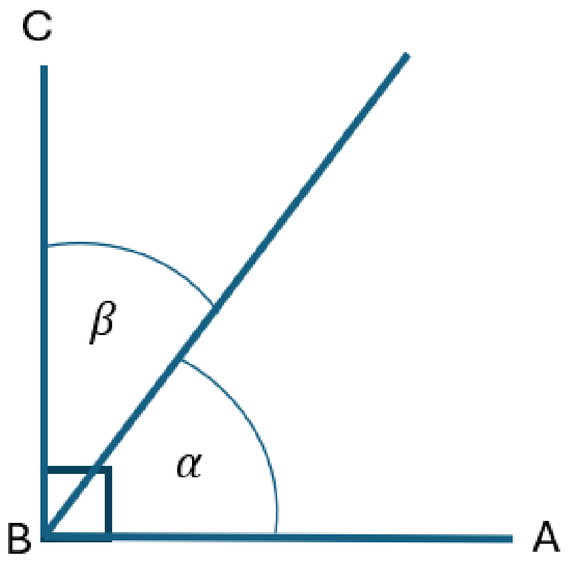
Ángulos Complementarios

Ángulos Complementarios

Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus ángulos es 90°; así, el complemento de un ángulo es aquella medida del ángulo para completar 90°.

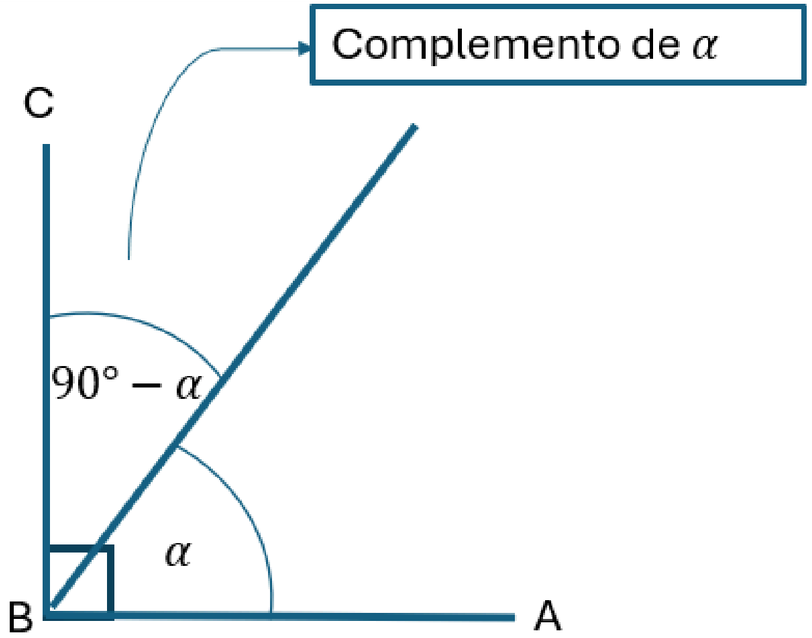
$\measuredangle ABC = 90°$

$\alpha + \beta = 90°$



$\measuredangle ABC = 90°$

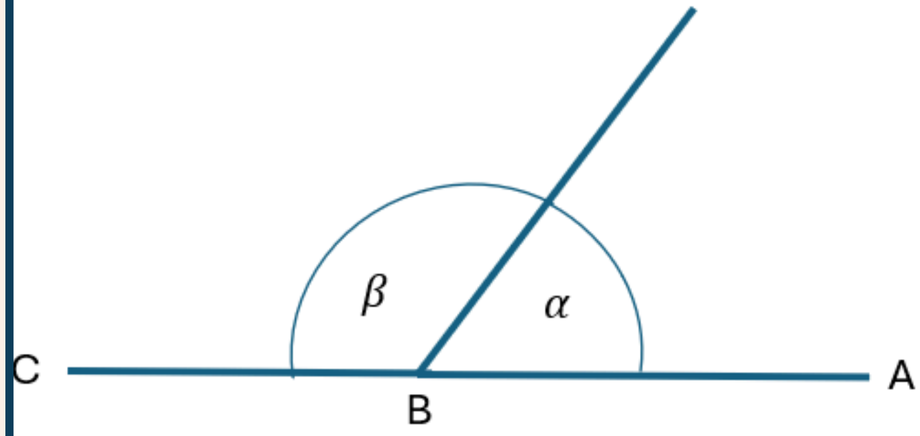
$(90° - \alpha) + \alpha = 90°$



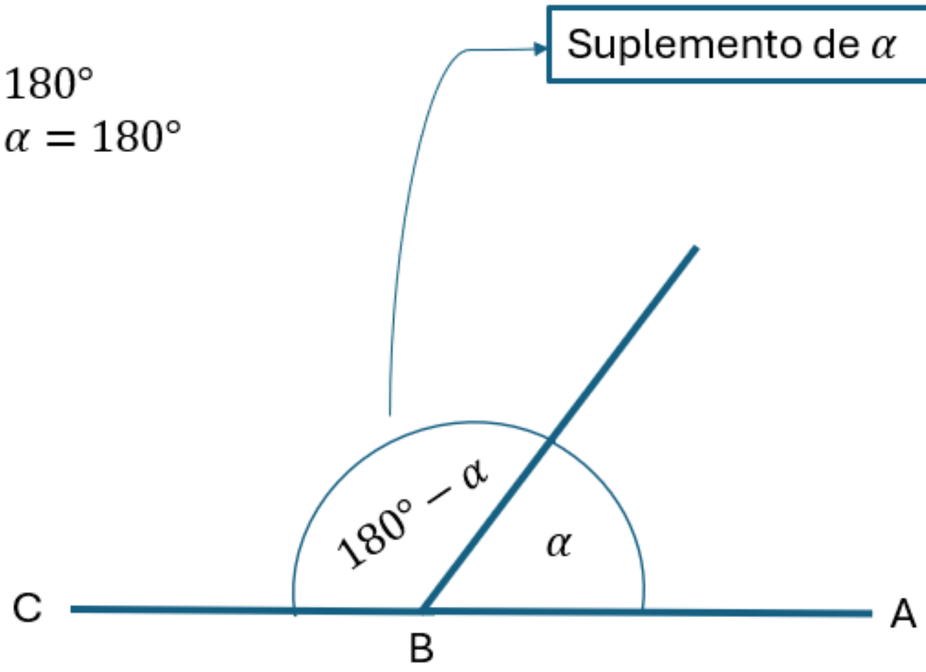
Ángulos Suplementarios

Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus ángulos es 180°; así, el complemento de un ángulo es aquella medida del ángulo para completar 180°.

$\measuredangle ABC = 180°$
$\alpha + \beta = 180°$

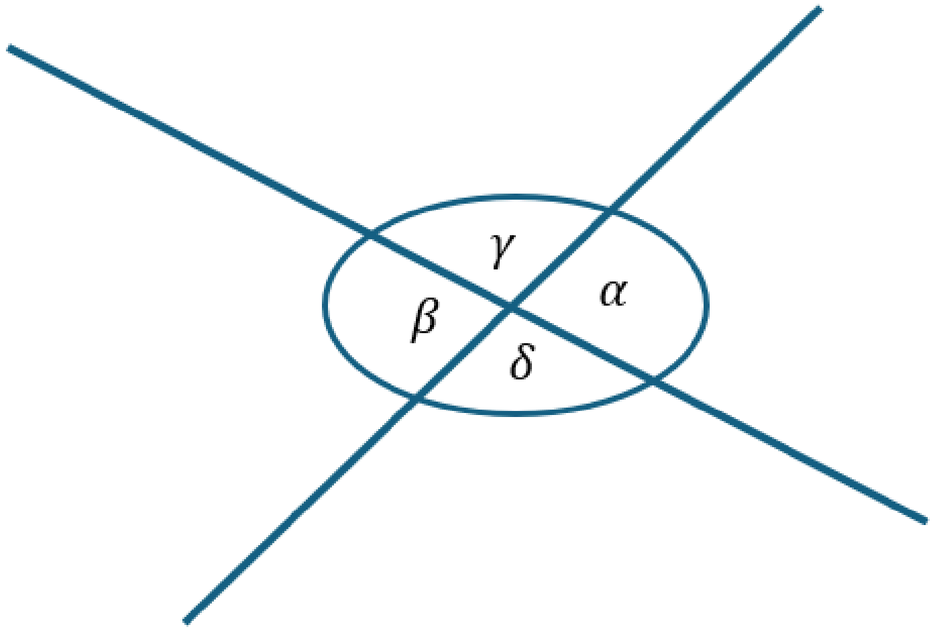


$\measuredangle ABC = 180°$
$(180° - \alpha) + \alpha = 180°$



Opuestos por el Vértice

Son aquellos ángulos tales que los lados de uno están formados por las prolongaciones de los lados del otro. O, en otras palabras, se forman al intersectar dos rectas.

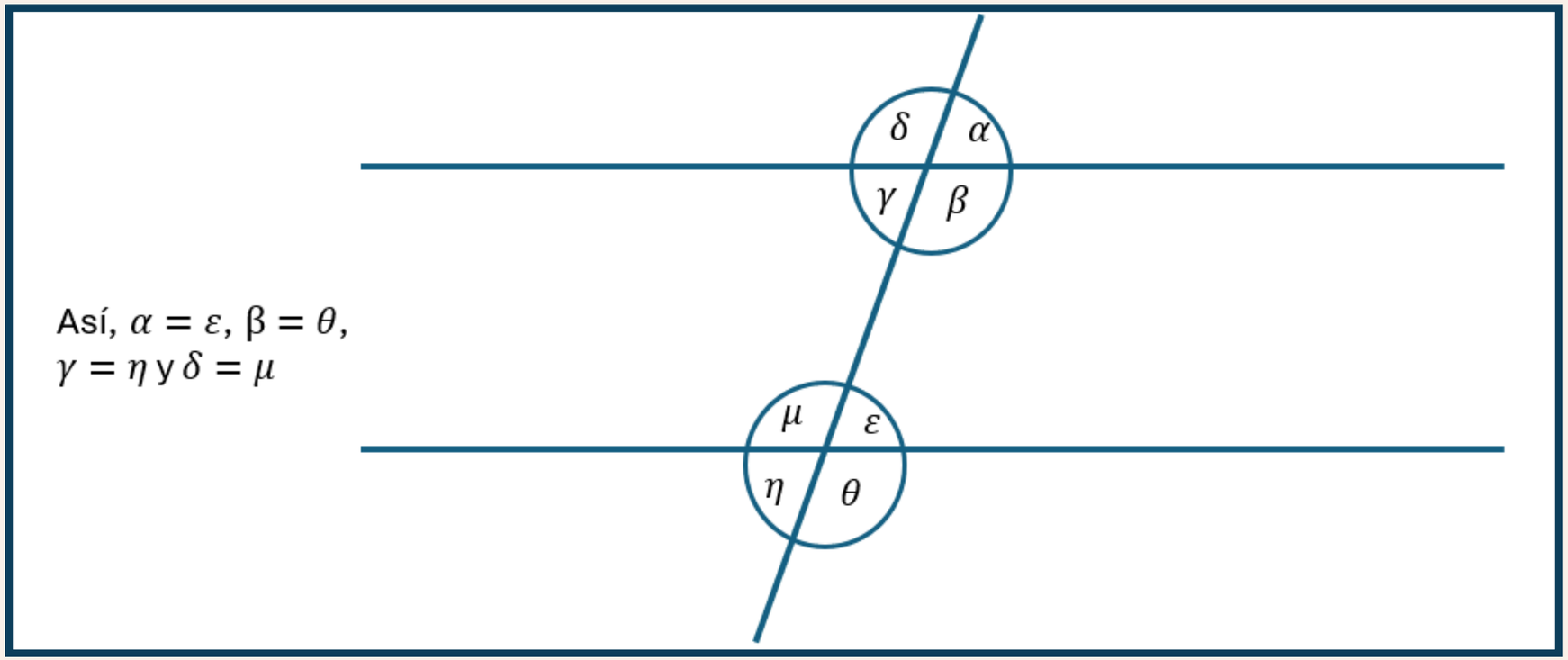


Así, $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$, ya que son los pares opuestos por el vértice

Geometría

Opuestos por el Vértice

Si L_1//L_2 y L_3 es una recta transversal a las dos anteriores, entonces se cumple la siguiente estructura



Triángulos

Triángulos

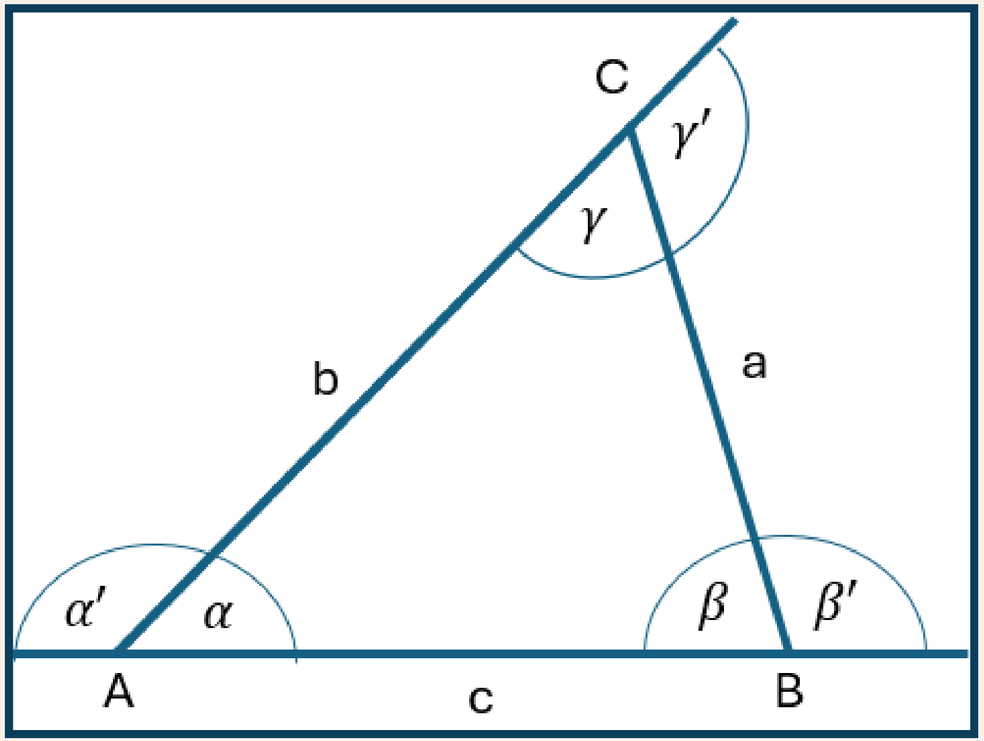
Un triángulo puede ser definido como un polígono de tres lados, o como un polígono con tres vértices. El triángulo es el polígono más simple y el único que no tiene diagonal.

a) A, B y C son los vértices.

b) AB=c, BC=a y CA=b son los lados.

c) ∢CAB=α, ∢ABC=β y ∢BCA=γ son los ángulos interiores.

d) α′, β′ y γ′ son los correspondientes ángulos exteriores.



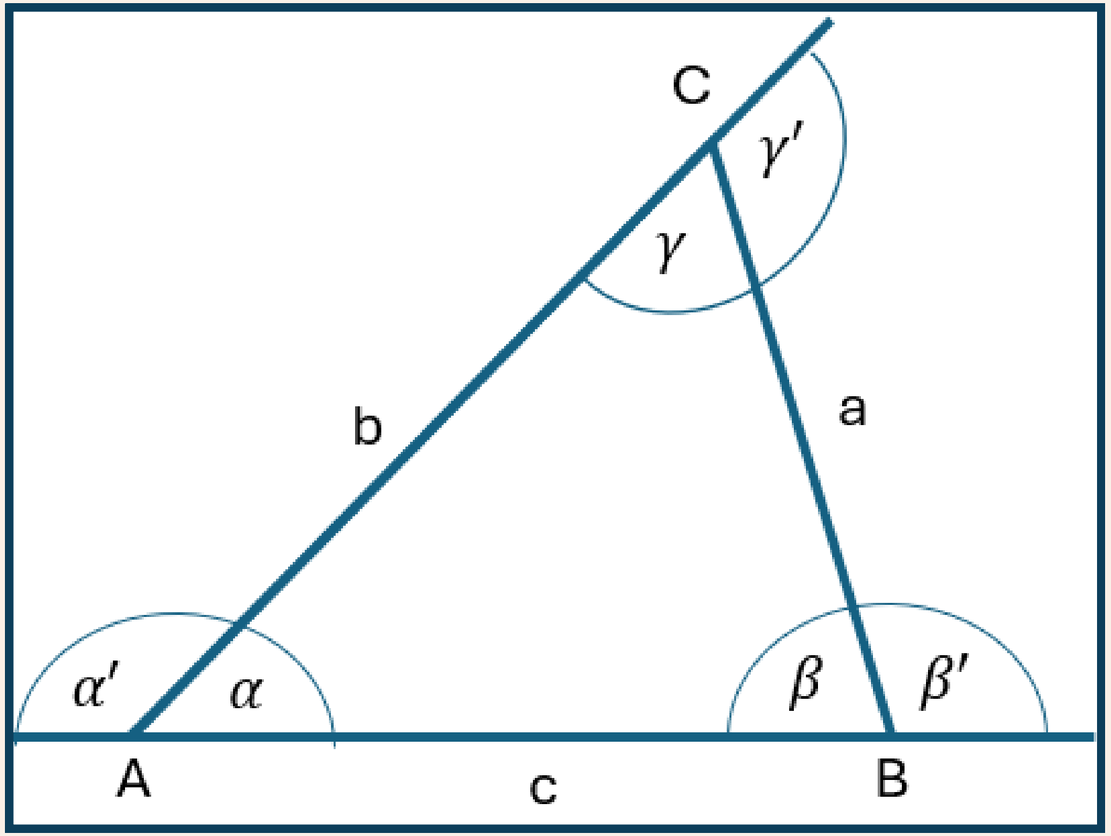
Geometría

Propiedades

a) “En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180°, es decir, α+β+γ=180°”.

b) “La suma de las medidas de los ángulos exteriores es 360°, es decir, α’+β’+γ’=360°”.

c) Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes:α+β=γ’; β+γ=α’; α+γ=β’.



Clasificación de Triángulos

Según la medida de sus ángulos:

- **Acutángulo:** es aquel triángulo que tiene sus tres ángulos interiores agudos.
- **Rectángulo:** es aquel triángulo que tiene uno y solo un ángulo interior recto. Los lados que forman el ángulo de 90° se conocen como catetos y el lado opuesto como hipotenusa.
- **Obtusángulo:** es aquel triángulo que tiene uno y solo un ángulo interior obtuso.

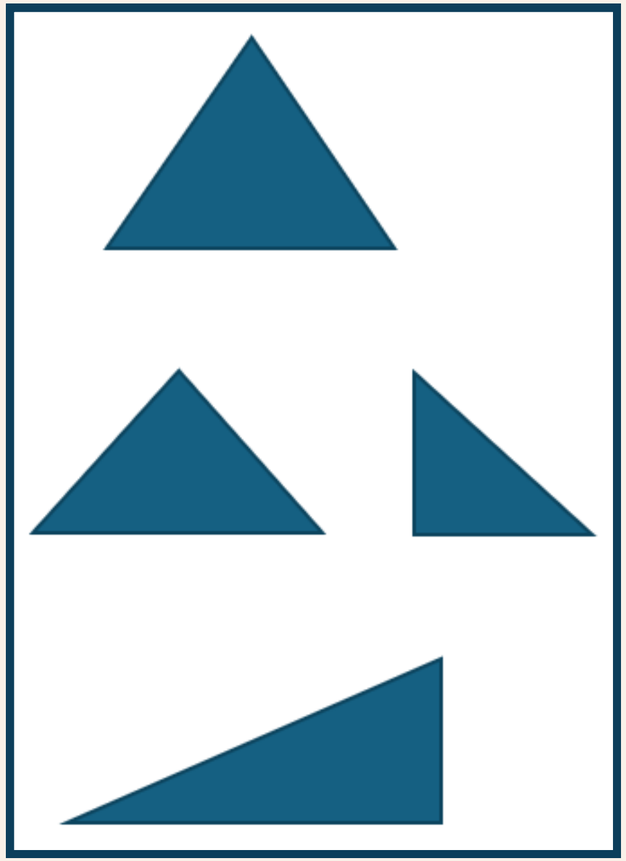
Clasificación de Triángulos

Según la medida de sus lados:

- **Equilátero:** es aquel triángulo que tiene sus tres lados congruentes, por lo cual se verificará que sus tres ángulos interiores son también congruentes e iguales a 60° cada uno.

- **Isósceles:** es aquel triángulo que tiene dos lados iguales y el tercer distinto. El lado distinto se llama base. Como consecuencia, dos de sus ángulos interiores de este triángulo son congruentes (miden igual) llamados ángulos basales.

- **Escaleno:** es aquel triángulo que tiene sus tres lados de distinta medida y, por lo tanto, sus tres ángulos interiores son diferentes entre sí.



Desigualdades del Triángulo

- A mayor ángulo se le opone un lado mayor y viceversa.

- La suma de las medidas de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la medida de la longitud del tercer lado (esta propiedad es conocida como la desigualdad triangular). Esto quiere decir que en cualquier triángulo de lados a, b y c siempre se cumplirá simultáneamente que "a+b>c ", "a+c>b" y "b+c>a“; si alguna de tales medidas no se cumple entonces se dice que el triángulo en inconstruible.

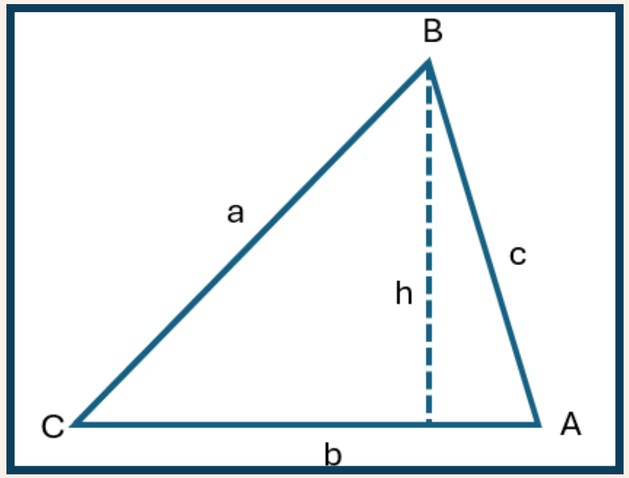
Perímetro y Área:
Triángulos

Perímetro y Área

- El perímetro de un triángulo corresponde a la suma de todos sus lados, es decir,

$$P_{\Delta} = a + b + c$$

- El área de un triángulo corresponde a su superficie, que se calcula multiplicando la base por su respectiva altura dividido en dos, es decir,

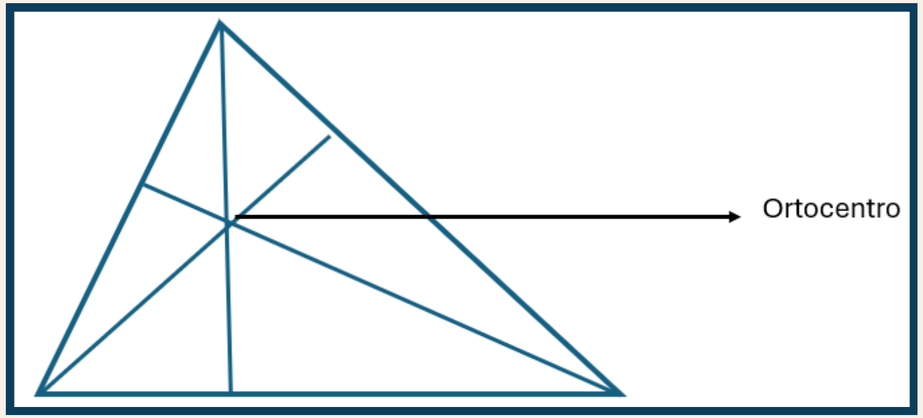


$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Altura

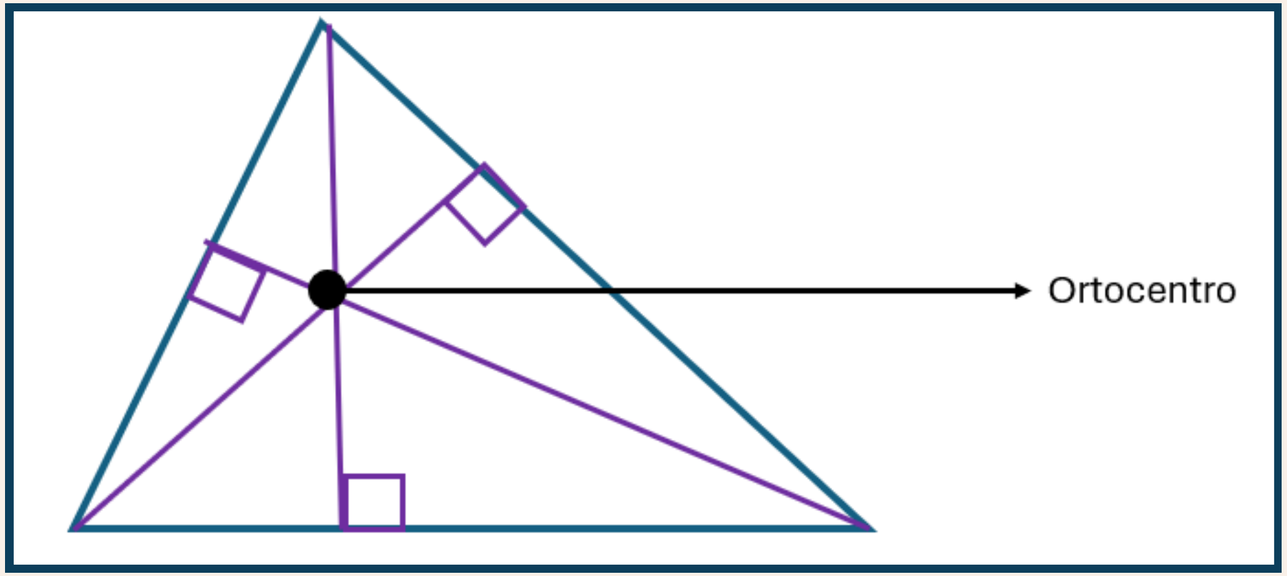
La altura es la distancia entre el vértice y su correspondiente lado. Es la perpendicular trazada desde cada vértice del triángulo al lado opuesto de éste. Tradicionalmente se denotan como h_a, h_b y h_c, denotando el lado en donde cae la perpendicular.

Es importante el notar que la intersección de las alturas se conoce como **Ortocentro** y dependiendo de su ubicación en el plano es posible determinar la naturaleza del triángulo que se está mencionando.



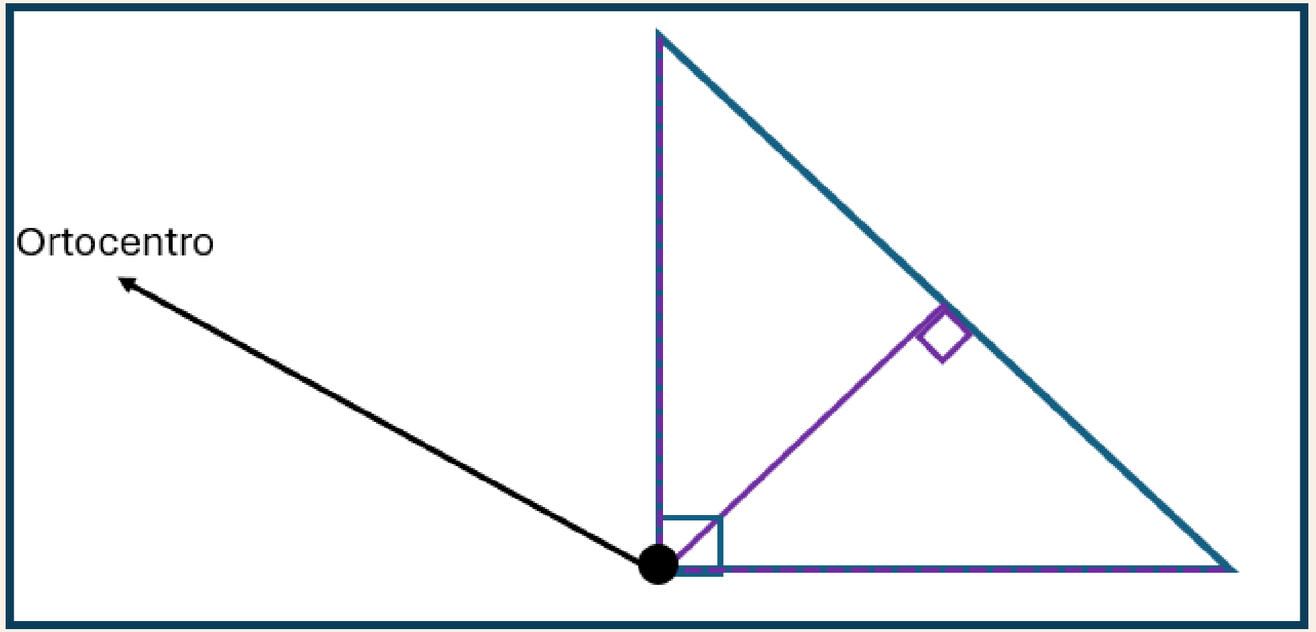
Triángulo Acutángulo

Si el triángulo es Acutángulo, entonces el ortocentro es siempre un punto interior del mismo y viceversa.



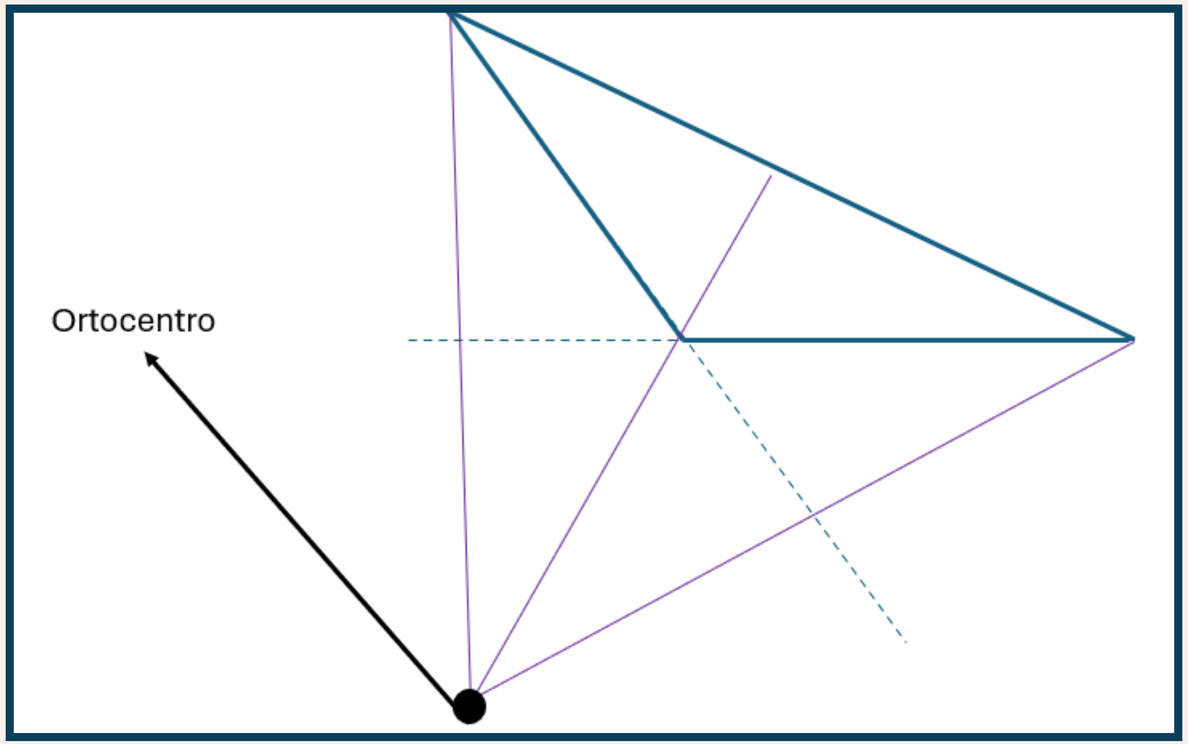
Triángulo Rectángulo

Si el triángulo es Rectángulo, entonces el ortocentro corresponde a uno de los vértices del mismo y viceversa.



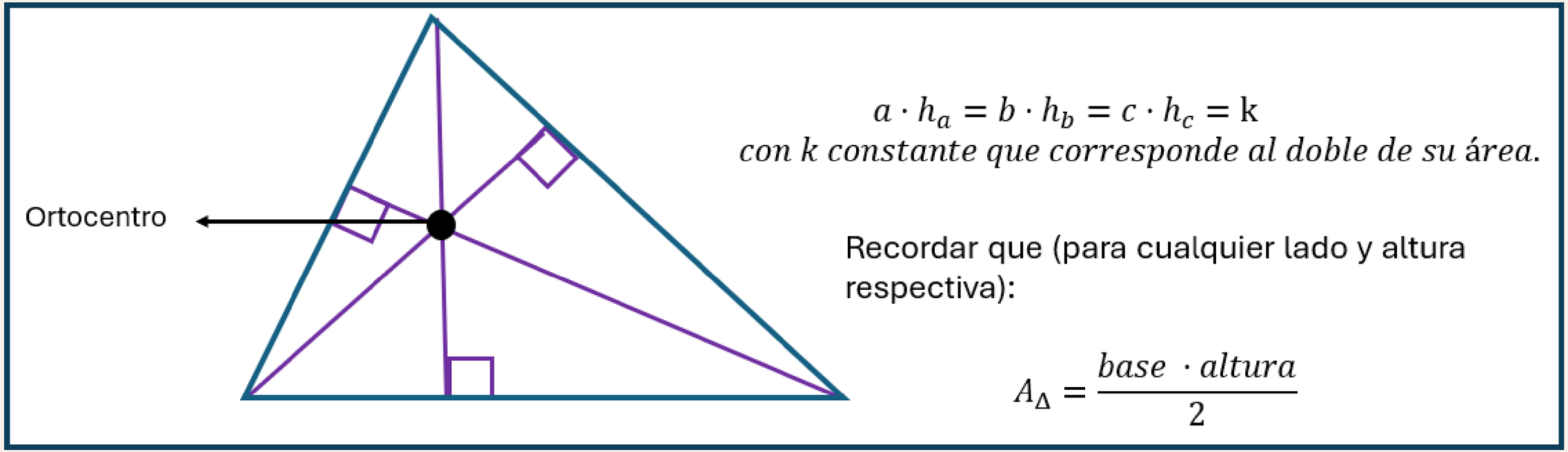
Triángulo Obtusángulo

Si el triángulo es Obtusángulo, entonces el ortocentro está fuera del triángulo y viceversa.



Área

Las alturas de un triángulo son inversamente proporcionales a los lados. Por esta razón, a lado mayor le corresponde la menor altura y a lado menor le corresponde la mayor altura.



$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = \mathrm{k}$$

con k constante que corresponde al doble de su área.

Recordar que (para cualquier lado y altura respectiva):

$$A_\Delta = \frac{base \ \cdot altura}{2}$$

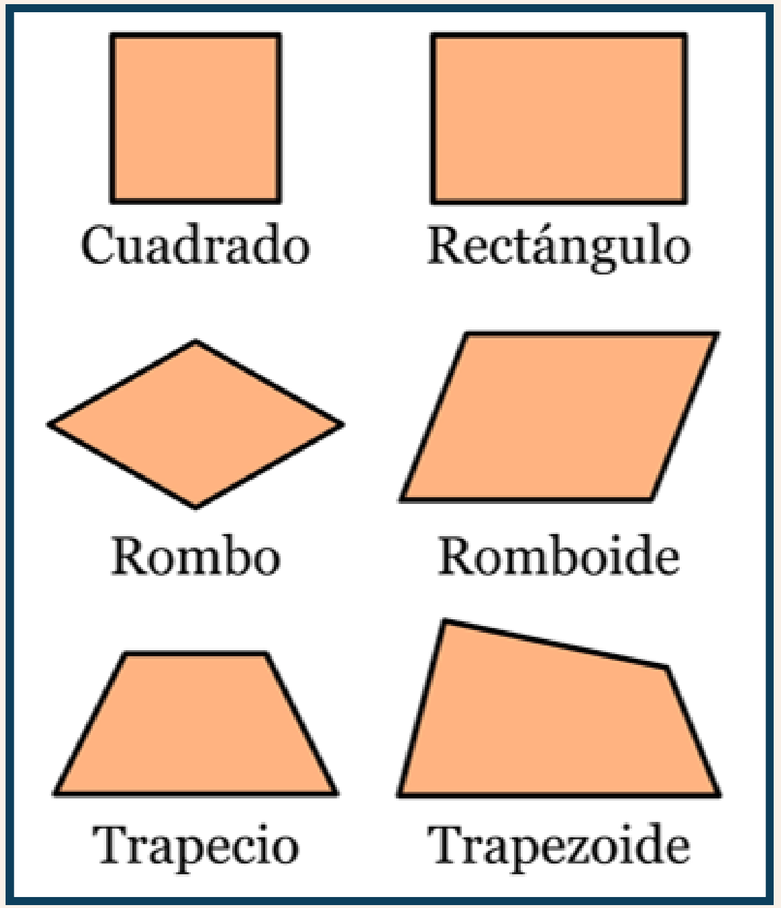
Cuadriláteros

Geometría

Cuadriláteros

Un cuadrilátero es un polígono (figura plana, cerrada y delimitada por segmentos de recta) que tiene cuatro lados y cuatro ángulos.

- Los ángulos interiores suman 360°
- Los ángulos exteriores suman 360°



Geometría

Cuadriláteros

1.Paralelogramos:

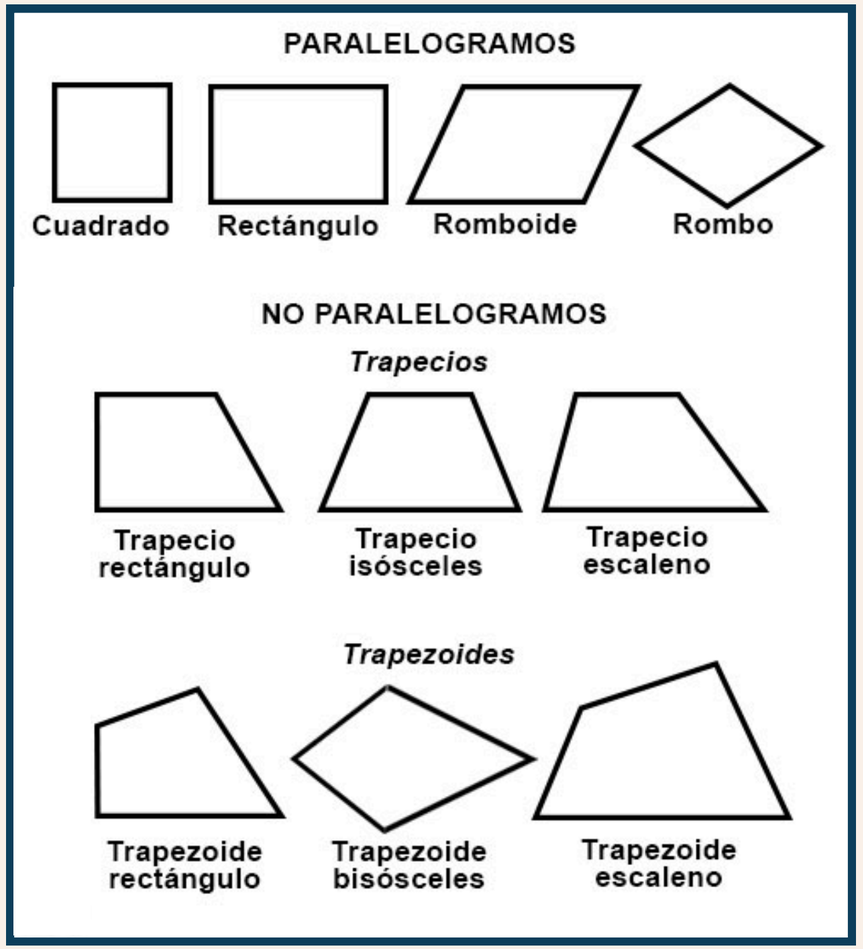
- Cuadrado
- Rectángulo
- Rombo
- Romboide

2.Trapecios:

- Trapecio Escaleno
- Trapecio Isósceles
- Trapecio Rectángulo

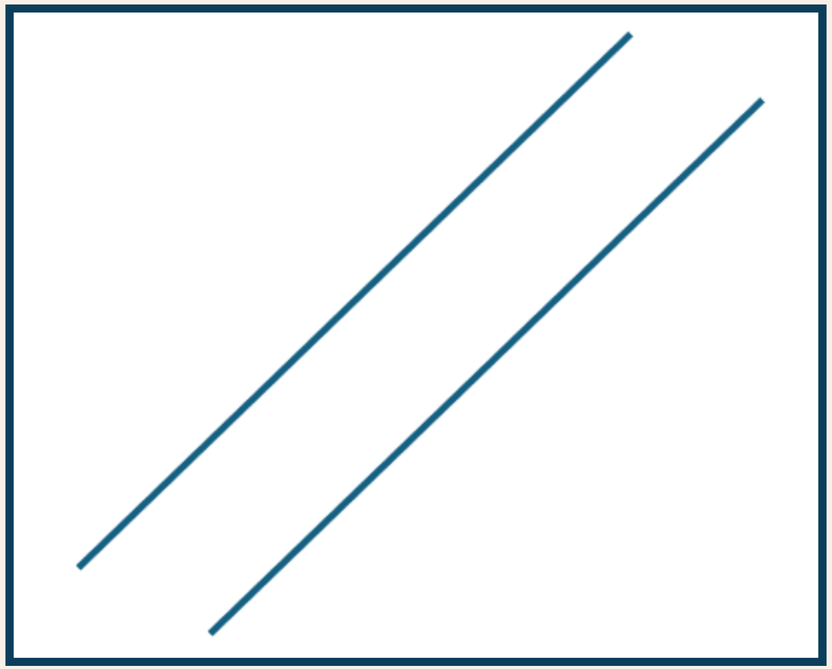
3.Trapezoides:

- Trapezoide Asimétrico
- Trapezoide Simétrico (Deltoide)



Rectas Paralelas

Dos rectas, L_1 y L_2 son paralelas (L_1//L_2) si y solo si están en un mismo plano y nunca se intersectan.



Tipos de Cuadriláteros

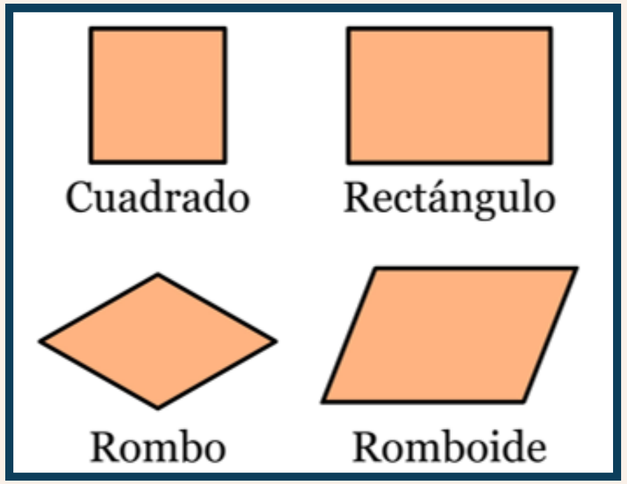
1.Paralelogramos: Son cuadriláteros que tienen dos pares de lados opuestos paralelos.

a) Cuadrado: Es el paralelógramo que tiene sus cuatro ángulos interiores rectos y sus cuatro lados son congruentes

b) Rectángulo: Es aquel paralelógramo cuyos ángulos interiores son rectos.

c) Rombo: Es aquel que tiene sus cuatro lados congruentes.

d) Romboide: Es aquel paralelogramo que tiene dos lados adyacentes distintos y ninguno de sus lados interiores rectos.



Geometría

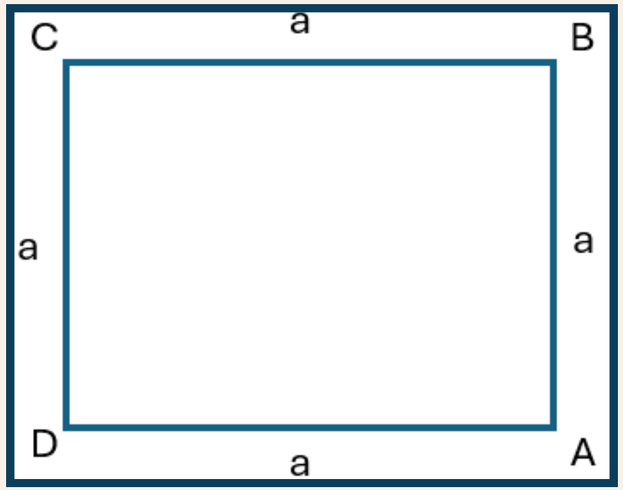
Cuadrado

- El perímetro de un cuadrado corresponde a la suma de todos sus lados, es decir,

$$P = a + a + a + a = 4a$$

- El área de un cuadrado corresponde a su superficie, que se calcula multiplicando la base por sí mismo, es decir,

$$A = a \cdot a = a^2$$



Geometría

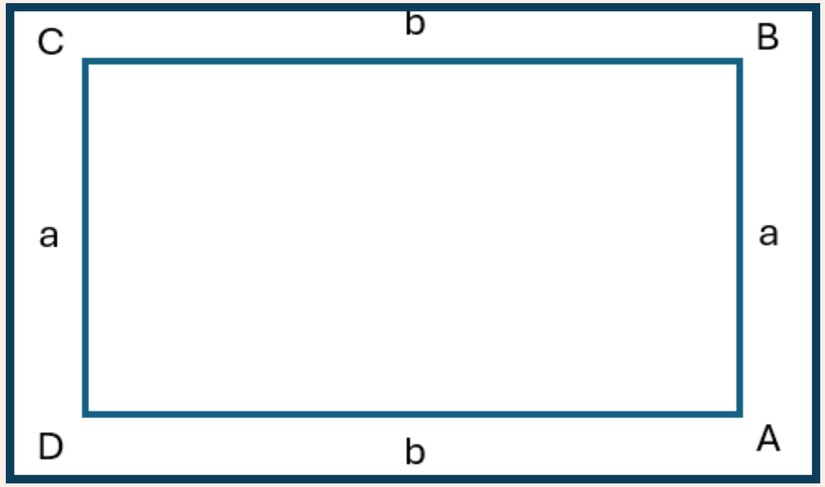
Rectángulo

- El perímetro de un rectangulo corresponde a la suma de todos sus lados, es decir,

$$P = a + b + a + b = 2a + 2b$$

- El área de un rectangulo corresponde a su superficie, que se calcula multiplicando la base por la altura, es decir,

$$A = a \cdot b = a \cdot b$$

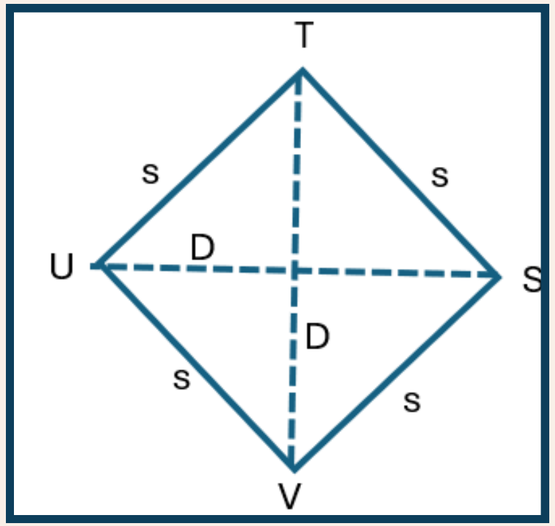


Geometría

Rombo y Romboide

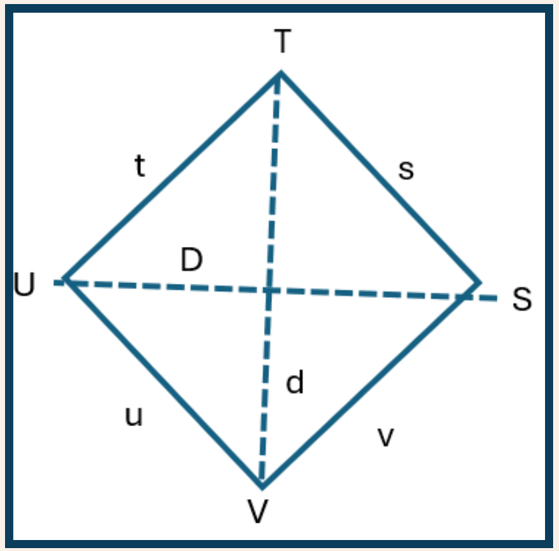
- El perímetro de un rombo o romboide corresponde a la suma de todos sus lados, es decir,

- El área de un rombo o romboide corresponde a su superficie, que se calcula multiplicando sus dos diagonales dividido en dos, es decir,



$$P = s + s + s + s = 4s \mid P = s + t + u + v$$

$$A = \frac{D \cdot D}{2} = \frac{D^2}{2} \mid A = \frac{D \cdot d}{2}$$



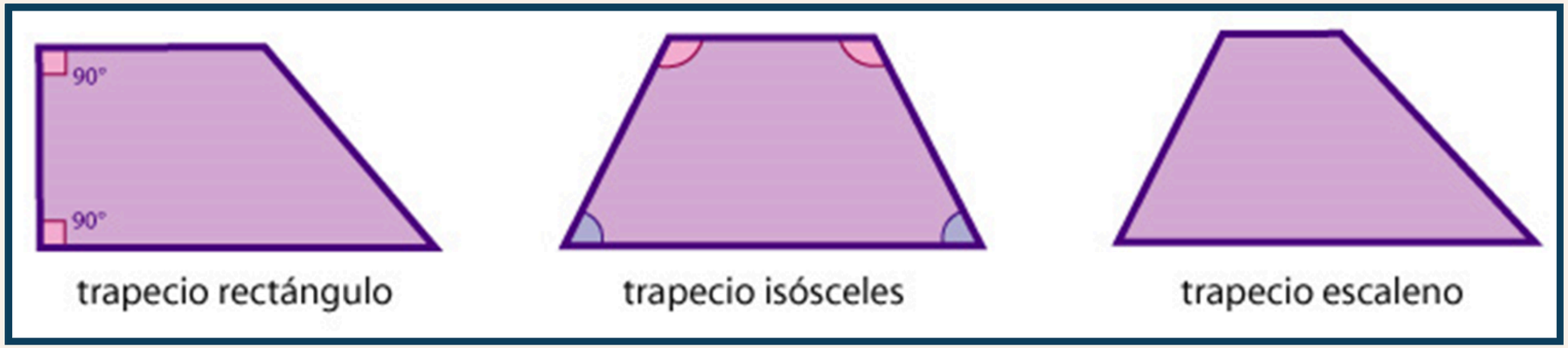
Tipos de Cuadriláteros

2.Trapecios: Son cuadriláteros que tienen un solo par de lados paralelos, llamados bases. Los trapecios se pueden clasificar en: escalenos, isósceles y rectángulos.

a) Escaleno: Sus lados no paralelos tienen distinta medida, o sea, no son congruentes.

b) Isósceles: Sus lados no paralelos son congruentes.

c) Rectángulo: Uno de sus lados no paralelos es perpendicular a las bases.



Geometría

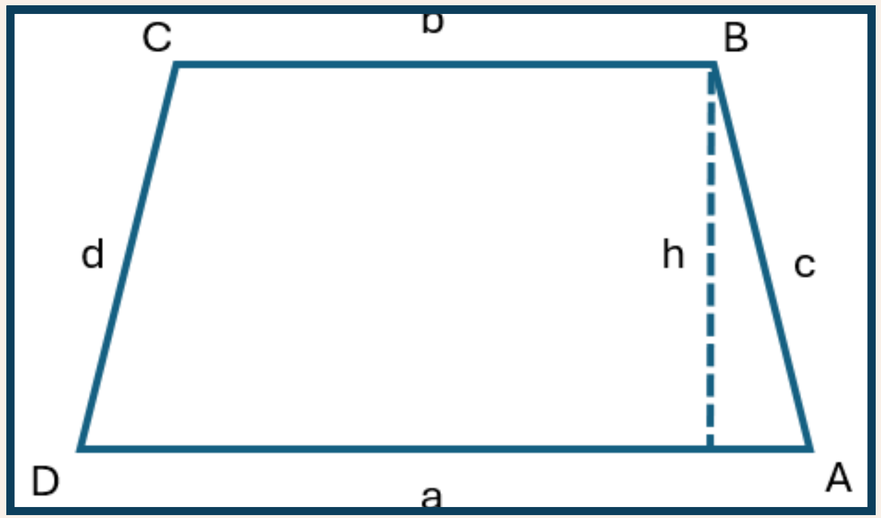
Trapecios

- El perímetro de un cuadrado corresponde a la suma de todos sus lados, es decir,

$$P = a + b + c + d$$

- El área de un trapecio corresponde a su superficie, que se calcula multiplicando el promedio de sus bases por su altura, es decir,

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

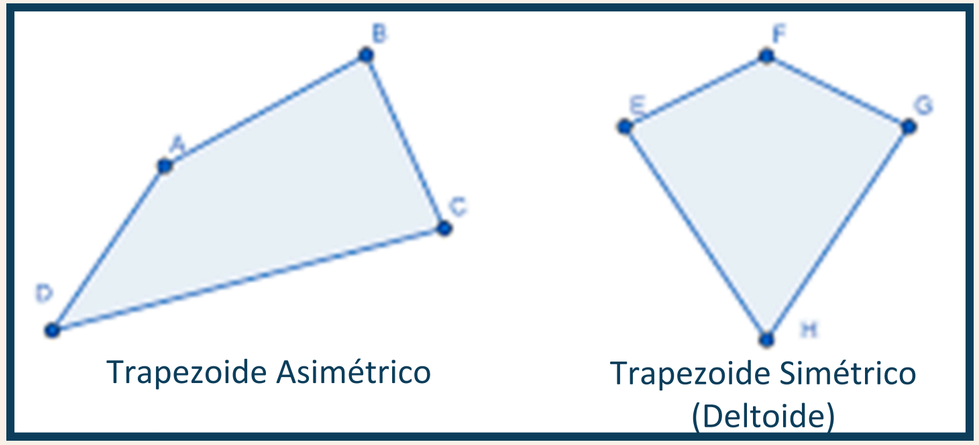


Tipos de Cuadriláteros

3.Trapezoides: Son cuadriláteros que no tienen lados paralelos.

a) Trapezoide Asimétrico:

b) Trapezoide Simétrico (Deltoide): Si bien no hay propiedades específicas, ya que éstos cumplen solo la generalidad de todo cuadrilátero, el caso del "Deltoide" es particular, ya que, al ser simétrico, una de sus diagonales es eje de simetría y bisectriz. Se puede considerar también al Deltoide como la unión de dos triángulos isósceles no congruentes cuyas bases son de igual medida. Estas bases unidas comprenden el segmento que corresponde a una de las diagonales del Deltoide, y que es perpendicular al eje de simetría.



Trapezoide Asimétrico

Trapezoide Simétrico (Deltoide)

GEOMETRÍA

ÁREA Y PERÍMETRO

El área es la medida de la superficie contenida dentro de una figura plana, y el perímetro es la suma de las longitudes de todos sus lados..

Perímetro y Área:
Círculo

GEOMETRÍA

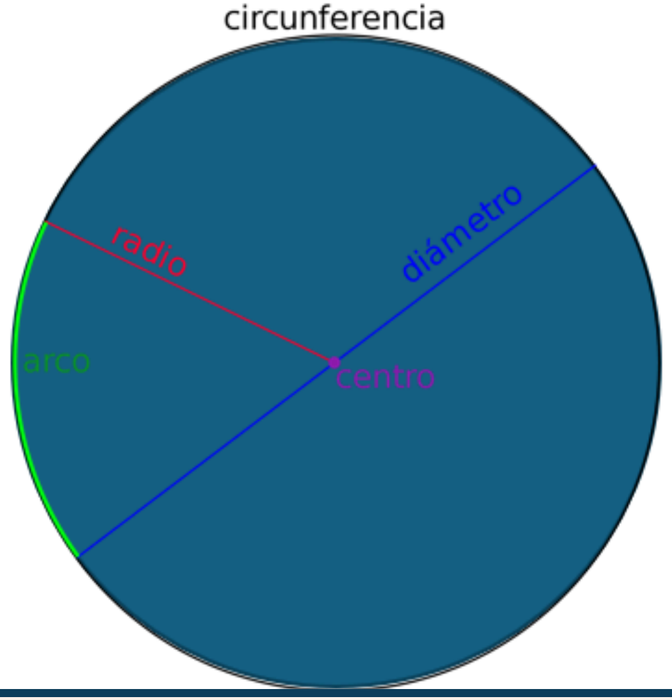
CIRCULOS

Un círculo es una figura plana y cerrada formada por todos los puntos que están a una misma distancia (llamada radio) de un punto fijo, denominado centro. El círculo es una figura curva sin ángulos ni lados rectos.

Perímetro y Área

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan a otro punto llamado centro. El perímetro y el área se calculan gracias al número irracional π.

$Perímetro: 2 \cdot r \cdot \pi$



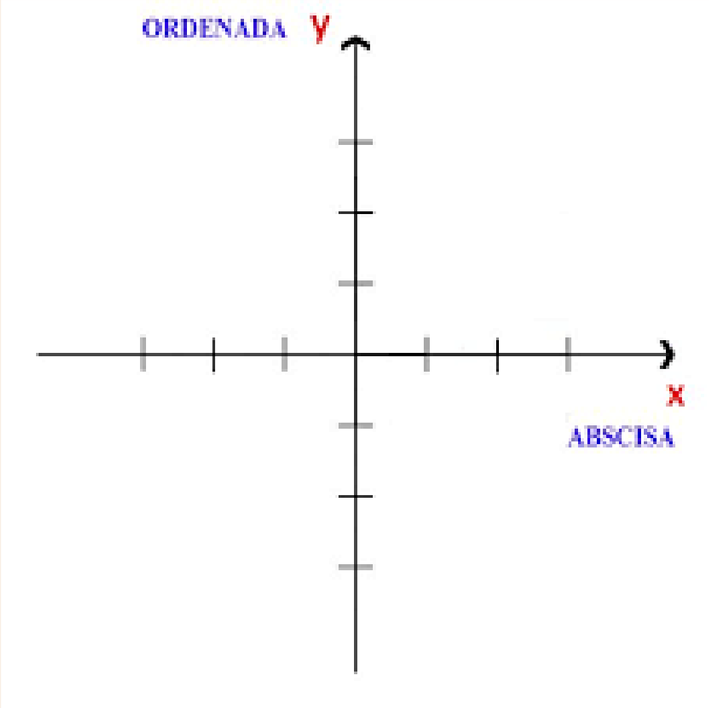
$Área: \pi \cdot r^2$

PLANO CARTESIANO

Geometría

EJES

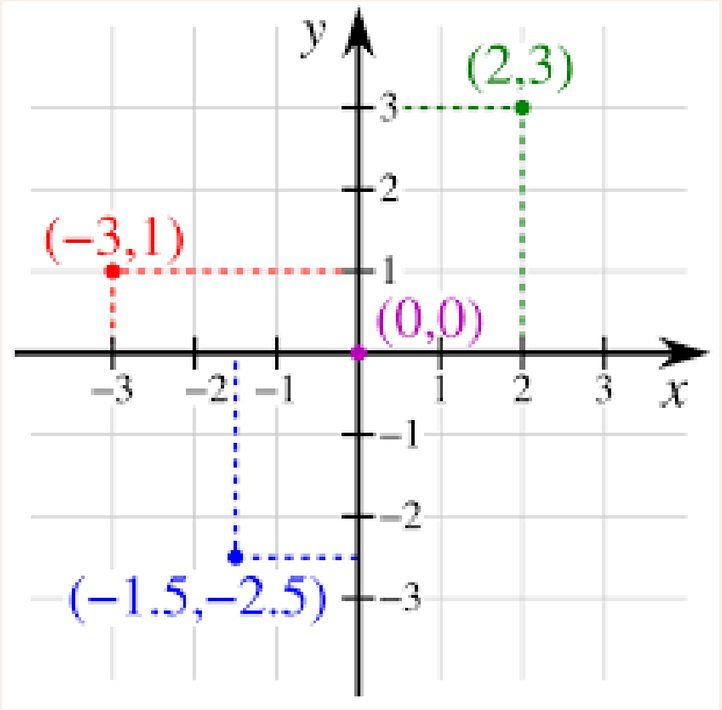
Rectas transversales graduadas regularmente que forman un plano (bidimensional).



Geometría

Coordenadas

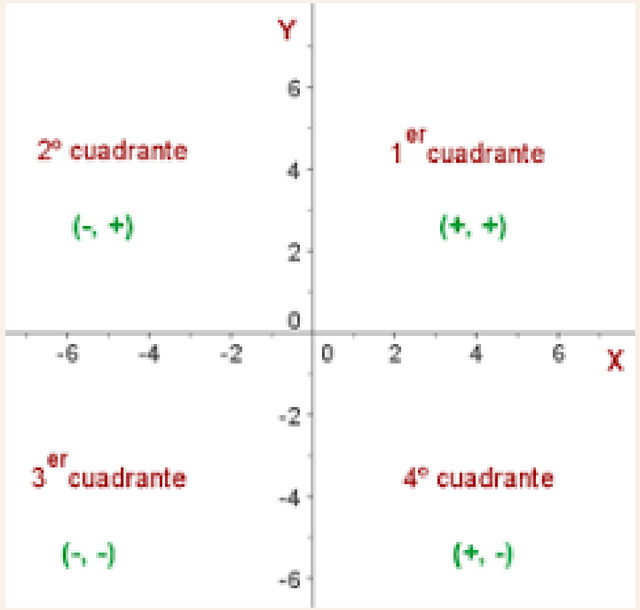
las coordenadas de un punto se representan por un par ordenado (x, y), donde 'x' indica la posición horizontal (abscisa) y 'y' la posición vertical (ordenada) con respecto al origen (punto 0,0).



Geometría

Coordenadas

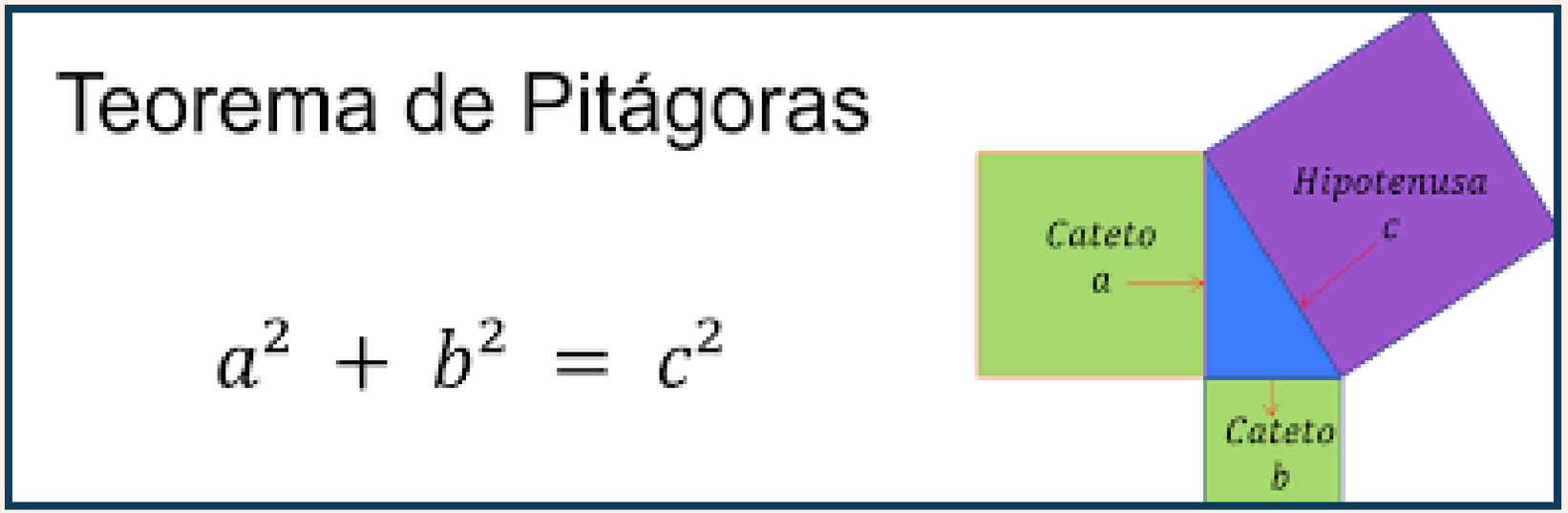
En el plano cartesiano, las cuatro áreas delimitadas por la intersección de los ejes X e Y se denominan cuadrantes. Los cuadrantes se numeran de I a IV, comenzando en la esquina superior derecha y moviéndose en sentido contrario a las agujas del reloj. El primer cuadrante (I) es la región superior derecha, el segundo (II) la superior izquierda, el tercero (III) la inferior izquierda y el cuarto (IV) la inferior derecha



Triángulo Rectángulo:
Teorema de Pitágoras

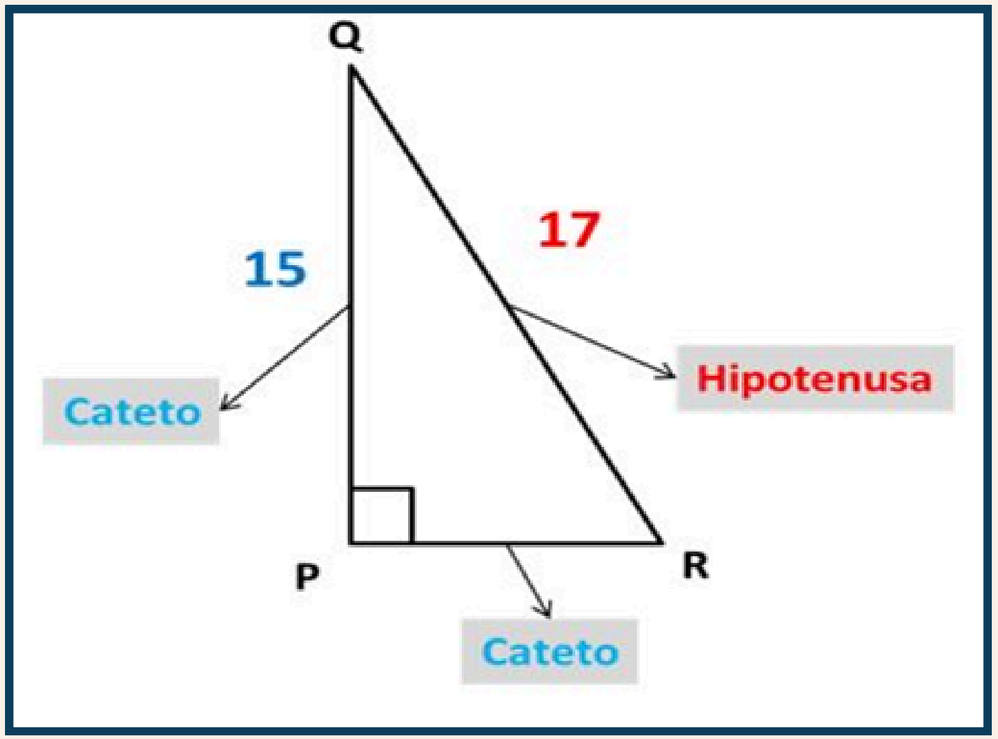
Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es una relación fundamental en geometría euclidiana entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Afirma que el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los otros dos lados. Es decir, en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Geometría

Ejemplo



$$PR = \sqrt{QR^2 - PQ^2}$$

$$PR = \sqrt{17^2 - 15^2}$$

$$PR = \sqrt{289 - 225}$$

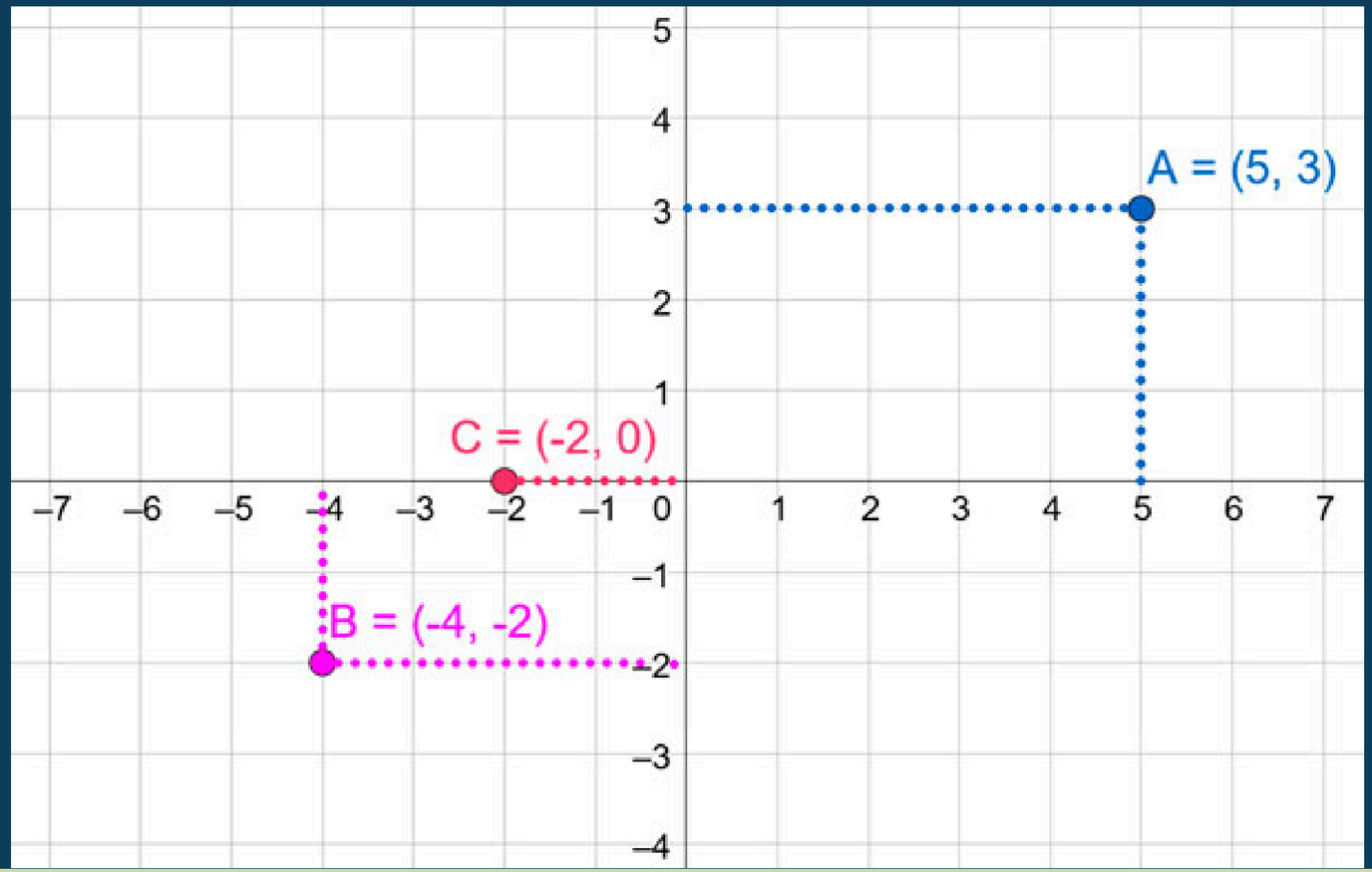
$$PR = \sqrt{64}$$

$$PR = 8$$

¡Muchas gracias por su atención!

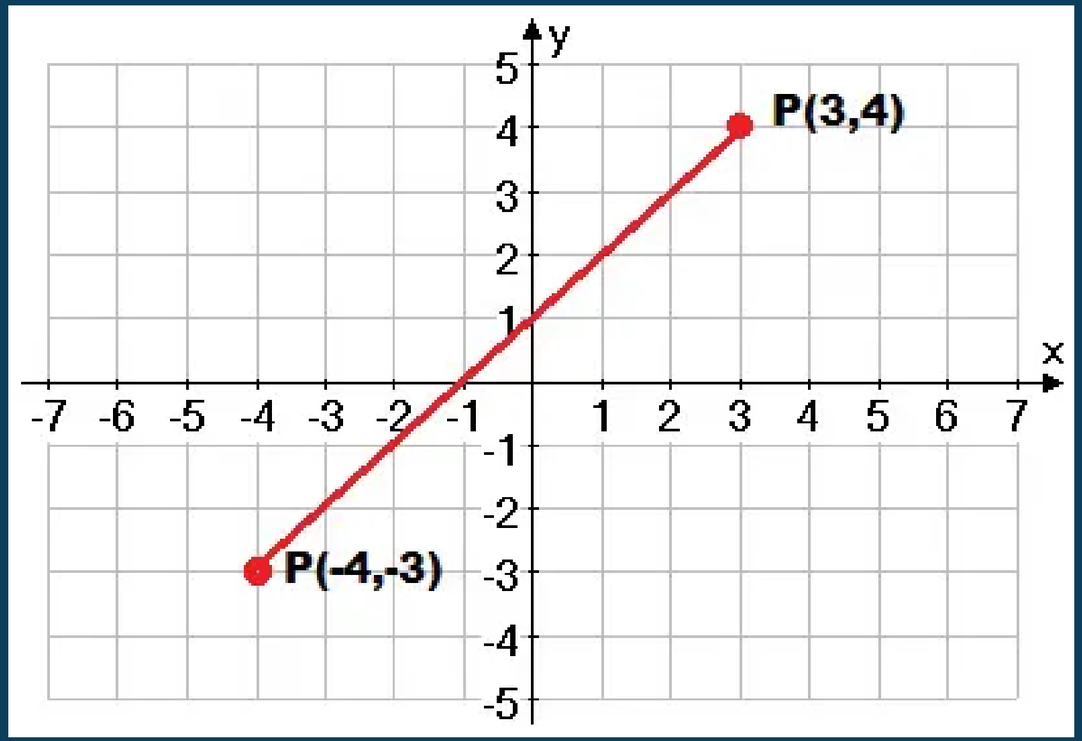
Tarea

¿Cuál es la distancia de todos estos puntos respecto al origen?



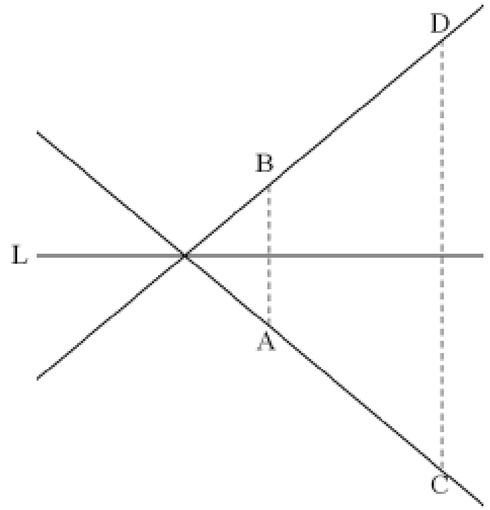
Tarea

¿Y entre estos dos?



Ejemplo

65. En la figura adjunta, el punto B es el simétrico del punto A con respecto a la recta L, el punto D es el simétrico del punto C con respecto a la recta L y $\sphericalangle CDB = 50°$.

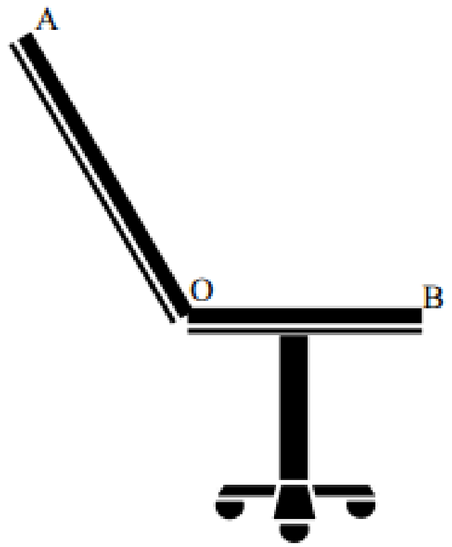


¿Cuánto mide uno de los ángulos formados por las rectas DB y CA ?

A) 40°
B) 45°
C) 50°
D) 80°

Ejemplo

44. Una fábrica hace sillas de escritorio de distinto tamaño, las cuales se pueden reclinar hasta en un ángulo de $135\,°$, tal como se representa en la figura adjunta.



Para cualquier tamaño de silla, ¿cuál de las siguientes fórmulas permite determinar la distancia entre A y B (D_{AB}) de manera que el respaldo quede perpendicular al asiento?

A) $D_{AB} = AO + BO$

B) $D_{AB} = \sqrt{AO^2 + BO^2}$

C) $D_{AB} = \sqrt{2AO^2}$

D) $D_{AB} = \sqrt{2AO^2} - BO$

Ejemplo

49. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles de área $72\ \text{cm}^2$?

A) $\left(2\sqrt{72}+\sqrt{144}\right)\text{cm}$

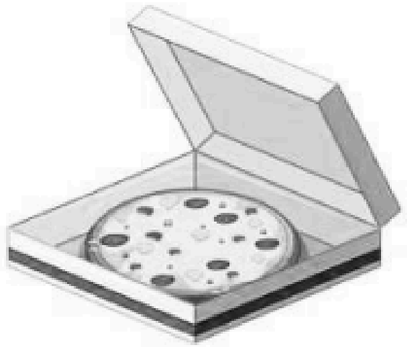
B) $\left(24+12\sqrt{2}\right)\text{cm}$

C) $\left(2\sqrt{144}+288\right)\text{cm}$

D) $\left(2\sqrt{72}+144\right)\text{cm}$

Ejemplo

48. Considera una caja de pizza de base cuadrada de $400\ \text{cm}^2$ de área, como se representa en la figura adjunta.



Si en la pizzería se quiere aprovechar al máximo la caja para guardar una pizza, ¿cuál es el perímetro de la pizza redonda más grande que se puede guardar en esta caja?

A) 100π cm

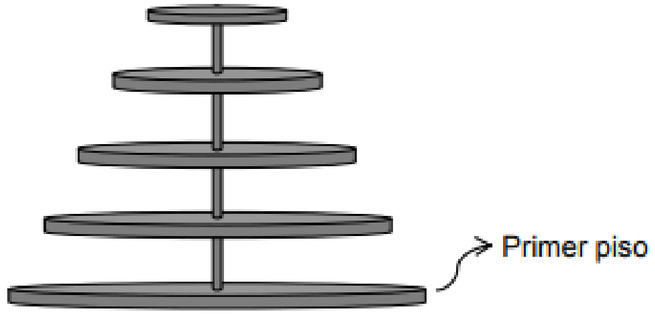
B) 400π cm

C) 10π cm

D) 20π cm

Ejemplo

57. Una empresa de repostería usa un diseño de bandejas desmontables de forma circular que se apilan una sobre otra para ir colocando diferentes dulces, tal como se representa en la figura adjunta.



Para determinar el diámetro de la bandeja que va ubicada en el piso k, la empresa usa la expresión $\left(1 - \frac{k-1}{2(n-1)}\right) \cdot p$, tal que n representa la cantidad de bandejas desmontables que se usarán y p es el diámetro de la bandeja del primer piso, en centímetros.

La empresa tiene que preparar un diseño de cinco pisos tal que el diámetro de la bandeja del primer piso mida 40 cm.

¿Cuál será el área de la bandeja del tercer piso donde irán los dulces?

A) 225π cm^2

B) 240π cm^2

C) 300π cm^2

D) 900π cm^2

Ejemplo