Guía N°17 (M2)

<< Relaciones en la Circunferencia >>

NOMBRE: _____

I. Introducción

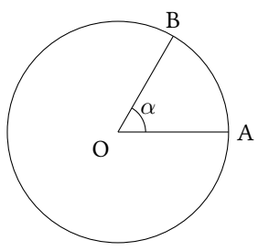
Se debe tener en cuenta que los dibujos que aparecen en la “PAES” son solo referenciales y por lo tanto cualquier dato que no sea aportado explícitamente por la figura o por el enunciado, o deducido a través de la información dada no es correcto. Así mismo, debemos recordar que la única información que se puede considerar en las figuras sin que sea dicha explícitamente, es que las gráficas están hechas en un sistema perpendicular de ejes.

La geometría (del griego geo: "tierra" y metría: "medida") es una rama fundamental de las matemáticas que estudia las propiedades, relaciones y medidas de puntos, líneas, ángulos, superficies y sólidos

II. Teoremas de los Ángulos

Ángulo del Centro

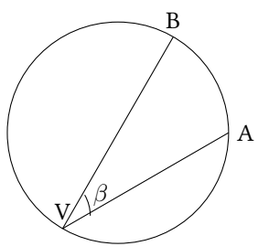
El ángulo del centro de una circunferencia es aquel cuyo vértice está en el centro de la circunferencia, y sus lados son dos radios.



Ángulo $AOB =$ Arco AB

Ángulo Inscrito

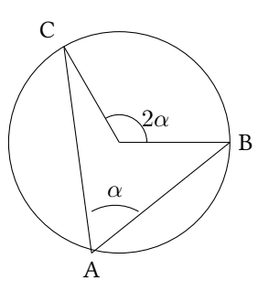
Un ángulo inscrito en una circunferencia es aquel cuyo vértice se encuentra sobre la propia circunferencia.



Ángulo $AVB = \frac{1}{2}$Arco AB

Relación entre Ángulo Inscrito y del Centro

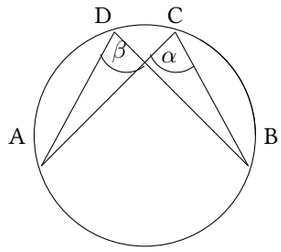
Si un ángulo inscrito y un ángulo del centro subtienden el mismo arco, entonces el ángulo del centro es el doble del ángulo inscrito.



Ángulo del centro $= 2 \times$ Ángulo inscrito

Igualdad de Ángulos Inscritos

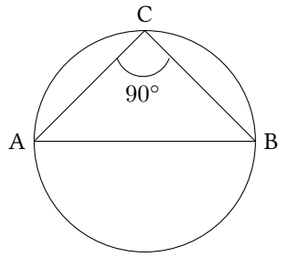
Si dos o más ángulos inscritos subtienden el mismo arco, éstos son iguales.



$$\alpha = \beta$$

Triángulo Inscrito en una Semicircunferencia

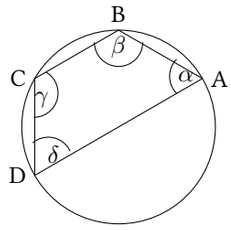
Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo con hipotenusa igual al diámetro.



Ángulo $ACB = 90^\circ$

Cuadrilátero Inscrito en una Circunferencia

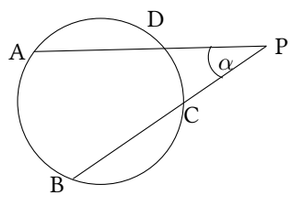
En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.



$$\alpha + \gamma = 180^\circ \quad \text{y} \quad \beta + \delta = 180^\circ$$

Ángulo Exterior

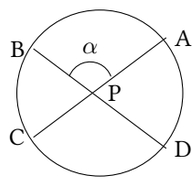
Si α es ángulo exterior de la circunferencia, entonces:



$$\alpha = \frac{\text{Arco } AB - \text{Arco } CD}{2}$$

Ángulo Interior

Si α es ángulo interior de la circunferencia, entonces:

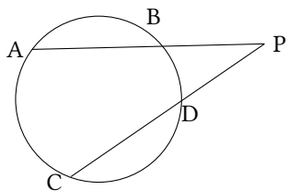


$$\alpha = \frac{\text{Arco } AB + \text{Arco } CD}{2}$$

Teoremas de los Trazos

Teorema de las Secantes

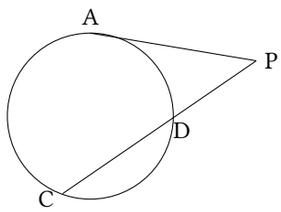
Sean PA y PB dos secantes, entonces:



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Teorema de la Tangente y Secante

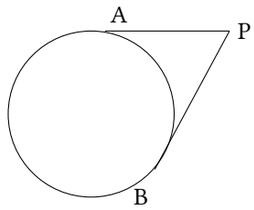
Sean PA una tangente y PC una secante, entonces:



$$PA^2 = PC \cdot PD$$

Teorema de las Tangentes

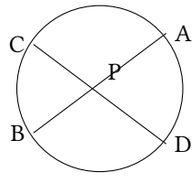
Sean PA y PB dos tangentes, entonces:



$$PA = PB$$

Teorema de las Cuerdas

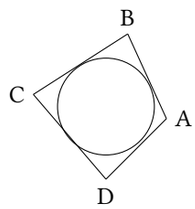
Sean AB y CD dos cuerdas que se intersectan en P, entonces:



$$AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

Cuadrilátero Circunscrito

Sea ABCD un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, entonces la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados opuestos.

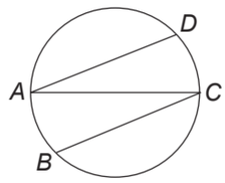


$$AB + CD = AD + BC$$

III. Ejercicios de Admisiones pasadas

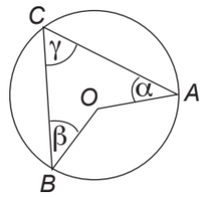
1) En la figura adjunta, los puntos A, B, C y D pertenecen a la circunferencia. Si AD // BC, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

a) $\angle$ ACB es congruente con $\angle$ CAD.
b) El arco AB es congruente con el arco CD.
c) El arco AB mide el doble que el ángulo ACB.
d) El arco DA es congruente con el arco BC.
e) Si AC es diámetro, AD es congruente con BC.



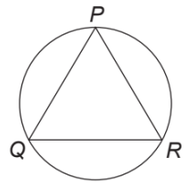
2) En la figura adjunta, los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia de centro O. Si $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$ y $\angle$ BOA = 120°, entonces el arco CB mide

a) 70°
b) 90°
c) 100°
d) 120°
e) 130°



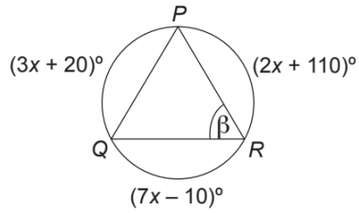
3) En la figura adjunta, el triángulo PQR se encuentra inscrito en la circunferencia. Si$PQ \cong RP \cong QR$, entonces el doble de la medida del arco PQ es

a) 240°
b) 120°
c) 90°
d) 60°
e) 30°



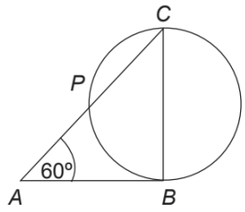
4) En la figura adjunta, los puntos P, Q y R pertenecen a la circunferencia. ¿Cuál es la medida del ángulo β?

a) 150°
b) 80°
c) 75°
d) 40°
e) 20°



5) En la figura adjunta se muestra un triángulo ABC, tangente en B a la circunferencia de diámetro CB. Si P es el punto donde el trazo AC intersecta a la circunferencia, entonces el arco BP mide

a) 300°
b) 150°
c) 240°
d) 120°
e) 60°

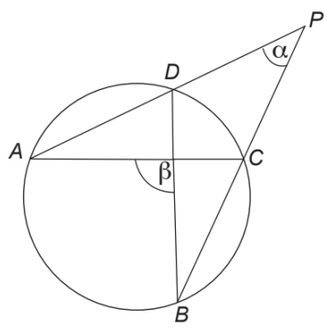


6) En la circunferencia de la figura adjunta, AP y BP son secantes que pasan por D y C, respectivamente, BD y AC son cuerdas, y los arcos AB y CD están en la razón 5 : 2. Es correcto afirmar que

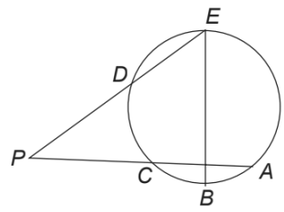
I) si β = 35°, entonces α = 15°.
II) si α = 30°, entonces β = 70°.
III) si $\alpha = \beta - 30°$, entonces α = 22,5°.

Es (son) verdadera(s)

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III

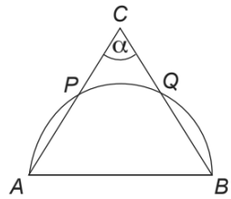


7) En la figura adjunta, BE es diámetro de la circunferencia y el arco ED es congruente con el arco DC. Si el arco CB y BA miden 80° y 50°, respectivamente, entonces la medida del ángulo APE es



a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 90°

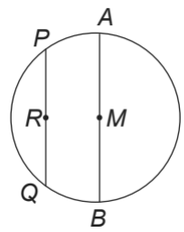
8) En la figura adjunta se muestra una semicircunferencia de diámetro AB, donde CA y CB la sectan en los puntos P y Q, respectivamente. Si el ángulo ACB es mayor que 20° y menor que 30°, entonces el intervalo que contiene únicamente a todos los posibles valores para la medida del arco QP es



a)]80°,130°[
b)]60°,70°[
c)]120°,140°[
d)]40°,60°[
e)]130°,150°[

9) En la figura adjunta, PQ es una cuerda y AB es un diámetro de la circunferencia de centro M. Si R es punto medio de la cuerda PQ y PQ // AB, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)?

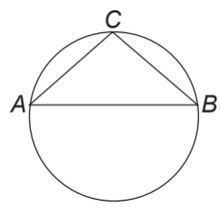
I) Los arcos AP y QB son congruentes.
II) El triángulo ARB es rectángulo isósceles.
III) $\triangle$ PMQ $\sim$ $\triangle$ ARB



a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) I, II y III

10) En la figura adjunta, los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia. Se puede determinar que el ángulo ACB es recto, si:

(1) AB es diámetro de la circunferencia.
(2) AC $\cong$ CB

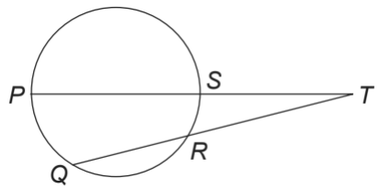


a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

IV. Ejercicios tipo PAES

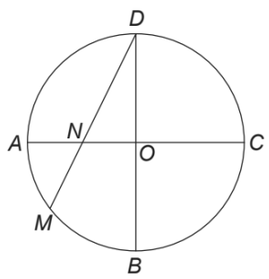
11) En la circunferencia de la figura adjunta, PT es una secante que contiene al diámetro PS y QT es una secante que intersecta a la circunferencia en R. Si QR = m, RT = k y la medida de ST es igual a la medida del radio de la circunferencia, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la medida de PS , en términos de k y m?

a) $\sqrt{k \cdot (m+k)}$
b) $\sqrt{\dfrac{4k \cdot (m+k)}{3}}$
c) $\sqrt{\dfrac{m \cdot k}{2}}$
d) $\dfrac{m+k}{3}$
e) $\sqrt{2m \cdot k}$



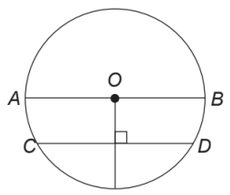
12) En la circunferencia de la figura adjunta, O es centro, DM es una cuerda y los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia. Si BD = 1, AC ⊥ DB y N es el punto medio de AO, entonces la medida de NM es

a) $\dfrac{1}{4}$
b) $\dfrac{3\sqrt{5}}{20}$
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
d) $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$
e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



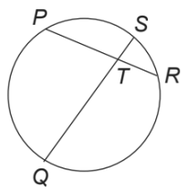
13) En la figura adjunta, O es centro de la circunferencia cuyo diámetro AB mide 20 cm y la distancia desde el centro de ella a la cuerda CD es de 6 cm. ¿Cuánto mide la cuerda CD ?

a) $2\sqrt{6}$ cm
b) 8 cm
c) $4\sqrt{6}$ cm
d) 10 cm
e) 16 cm



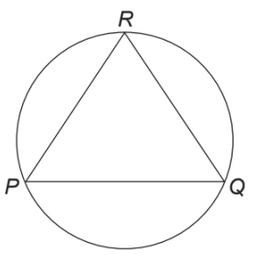
14) En la circunferencia de la figura adjunta, las cuerdas PR y QS se intersectan en T, tales que PR = (x + 5) cm y QS = (x + 7) cm. Si PT = 4 cm y TS = 3 cm, ¿cuánto mide el segmento TR?

a) 8 cm
b) 16 cm
c) 13 cm
d) 17 cm
e) 9 cm



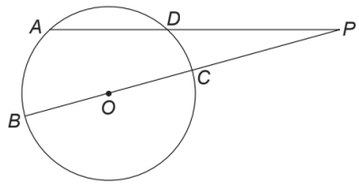
15) En la figura adjunta, el triángulo PQR está inscrito en una circunferencia. Si PQ = 3 y PR = RQ = $\dfrac{5}{2}$, entonces el diámetro de la circunferencia mide

a) $\dfrac{9}{8}$
b) $\dfrac{9}{4}$
c) $\dfrac{25}{8}$
d) $\dfrac{17}{4}$
e) $\dfrac{73}{16}$



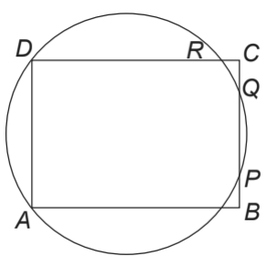
16) En la figura adjunta, AP y BP son secantes a la circunferencia de centro O y radio r. Si CP = 4 y D es el punto medio de AP, entonces el valor de AP, en términos de r, es

a) $2\sqrt{2r}$
b) $4\sqrt{2r}$
c) $2\sqrt{r+2}$
d) $4\sqrt{r+2}$
e) $2r+4$



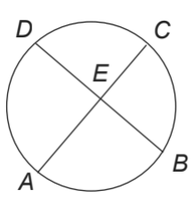
17) En la figura adjunta, ABCD es un rectángulo de lados AD = 9 cm y AB = 10 cm. Si la cuerda QP mide 5 cm y A, D y R pertenecen a la circunferencia, entonces la cuerda DR mide

a) $\frac{7}{5}$ cm
b) $\frac{20}{7}$ cm
c) $\frac{9}{2}$ cm
d) $\frac{50}{9}$ cm
e) $\frac{43}{5}$ cm



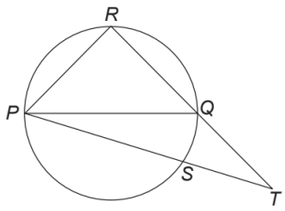
18) En la circunferencia de la figura adjunta, AC y BD son cuerdas que se intersectan en E. Si AE = 3,4, EC = 2,5 y DE = 3, ¿cuál de los siguientes valores es el más cercano a la medida de EB?

a) $2,83$
b) $3,21$
c) $4,08$
d) $1,97$
e) $2,21$



19) En la figura adjunta, el triángulo PQR isósceles rectángulo en R está inscrito en la circunferencia de diámetro $\sqrt{10}$. Si PT es secante y Q es el punto medio de RT , ¿cuál es la medida del segmento ST?

a) 1
b) 2
c) 2.5
d) 4
e) 5



20) En la figura adjunta, RT y MT son secantes a la circunferencia de centro O, con NT = 6 cm. Se puede determinar la medida de ST si:

(1) El radio de la circunferencia mide 5 cm.
(2) S es el punto medio de RT

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

