Guía N°19 (M2)

<< Porcentajes y Matemáticas Financieras >>

NOMBRE: _____

I. Introducción

Un **conjunto numérico** es un grupo de números que comparten ciertas propiedades y cumplen reglas específicas dentro del sistema numérico. Estos conjuntos nos permiten clasificar y organizar los números según su naturaleza y comportamiento. Los principales conjuntos numéricos son:

- **Números naturales** ($\mathbb{N}$): $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- **Números enteros** ($\mathbb{Z}$): $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- **Números racionales** ($\mathbb{Q}$): fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.
- **Números irracionales** ($\mathbb{Q}^*$): aquellos que no pueden expresarse como fracción, como π o $\sqrt{2}$.
- **Números reales** ($\mathbb{R}$): la unión de racionales e irracionales.

II. Porcentajes

Un porcentaje representa una **parte de cien** unidades. Se expresa con el símbolo %:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$

Cálculo de porcentaje

$$P\% = \left(\frac{\text{Parte}}{\text{Total}}\right) \times 100$$

Cálculo de cantidad

$$\text{Cantidad} = \frac{P\% \times \text{Total}}{100}$$

Ejemplo

$$25\% = 0.25 \quad \text{y} \quad 0.25 = 25\%$$

Ejemplo 1

¿Qué porcentaje es 15 de 60?

$$\frac{15}{60} \times 100 = 25\%$$

Ejemplo 2

Calcula el 30% de 80:

$$\frac{30 \times 80}{100} = 24$$

Aplicaciones prácticas

- **Descuentos en tiendas**: 20% de descuento en \$50

$$0.20 \times 50 = \$10 \text{ de descuento}$$

- **Impuestos**: IVA 16% en \$200

$$0.16 \times 200 = \$32$$

- **Estadísticas**: 75% de 400 estudiantes

$$0.75 \times 400 = 300 \text{ estudiantes}$$

Ejemplo

Una camiseta cuesta $45 con un 15% de descuento. ¿Cuál es su precio final?

A) $38.25

B) $40.50

C) $42.75

D) $36.00

Solución

$$45 - (0.15 \times 45) = 45 - 6.75 = \$38.25$$

Respuesta correcta: **A**

III. Matemáticas Financieras

Cambio Porcentual

Aumento Porcentual

Si una cantidad C aumenta en $P\%$, entonces se cumple que:

$$C + \frac{P}{100} \cdot C = C \cdot (1 + P\%)$$

- **Cantidad inicial**: C
- **Aumento**: $\frac{P}{100} \cdot C$
- **Cantidad final**: $C \cdot (1 + P\%)$

Disminución Porcentual

Si una cantidad C disminuye en $P\%$, entonces se cumple que:

$$C - \frac{P}{100} \cdot C = C \cdot (1 - P\%)$$

- **Cantidad inicial**: C
- **Disminución**: $\frac{P}{100} \cdot C$
- **Cantidad final**: $C \cdot (1 - P\%)$

Ahorros e Inversiones

Definiciones

- **Ahorros**: Se refieren a la parte del ingreso que una persona decide no gastar en el presente, sino reservar para el futuro.
- **Inversión**: Implica colocar el dinero en algún instrumento financiero con el objetivo de obtener una ganancia futura.

Diferencias Clave

- El objetivo de la **inversión** es generar un retorno sobre el capital invertido, y para ello, es necesario asumir cierto nivel de riesgo.
- Los **ahorros** no suelen tener riesgos significativos.

Interés Simple

Fórmula General

La fórmula del interés simple es la siguiente:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{t}{100} \cdot n\right)$$

Donde:

- C_f: Capital final
- C_i: Capital inicial
- t: Tasa de interés (en porcentaje)
- n: Período de tiempo asociado a la tasa de interés

Concepto

El interés simple es aplicar un aumento porcentual en $t\%$, de forma iterada, n veces.

$$C_f = C_i \cdot (1 + t\% \cdot n)$$

Evolución del Capital

- $C_1 = C_i \cdot (1 + t\%)$
- $C_2 = C_i \cdot (1 + t\% \cdot 2)$
- $C_3 = C_i \cdot (1 + t\% \cdot 3)$
- $C_4 = C_i \cdot (1 + t\% \cdot 4)$

Interés Compuesto

Fórmula General

La fórmula del interés compuesto es la siguiente:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

Donde:

- C_f: Capital final
- C_i: Capital inicial
- t: Tasa de interés (en porcentaje)
- n: Período de tiempo asociado a la tasa de interés

Concepto

El interés compuesto es aplicar un aumento porcentual en $t\%$, de forma iterada, n veces.

$$C_f = C_i \cdot (1 + t\%)^n$$

Evolución del Capital

- $C_1 = C_i \cdot (1 + t\%)$
- $C_2 = C_i \cdot (1 + t\%)^2 = C_i \cdot (1 + t\%)(1 + t\%)$
- $C_3 = C_i \cdot (1 + t\%)^3 = C_i \cdot (1 + t\%)(1 + t\%)(1 + t\%)$
- $C_4 = C_i \cdot (1 + t\%)^4 = C_i \cdot (1 + t\%)(1 + t\%)(1 + t\%)(1 + t\%)$

Ejemplo: Interés Compuesto

Si \$133.100 es el capital final al invertir un cierto monto (x), durante 36 meses, con una tasa de interés de tal manera que el capital cada año aumenta en un 10% respecto del año anterior, sin haber realizado depósitos ni retiros en ese período, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el valor de x, en pesos?

a) $133.100 = x(1 + 0.36)^{10}$

b) $133.100 = x\,(1 + 0.1 \cdot 3)^{10}$

c) $133.100 = x(1 + 0.1)^3$

d) $x = 133.100(1 + 0.1)^3$

e) $133.100 = x\,(1 + 0.1 \cdot 36)$

Solución:

- **Datos:**
  - Capital final: \$133.100
  - Tiempo: 36 meses = 3 años
  - Tasa: 10% anual (el capital aumenta 10% cada año)
  - Sin depósitos ni retiros
- **Análisis:** Como el capital aumenta 10% cada año, y son 3 años, aplicamos interés compuesto:

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$$
$$133.100 = x \cdot (1 + 0.1)^3$$
$$133.100 = x \cdot (1.1)^3$$

- **Respuesta correcta: c)** $133.100 = x(1 + 0.1)^3$

Conceptos Claves

Términos Financieros Básicos

- **Rendimiento esperado o rentabilidad**: Es el beneficio o ganancia que se espera obtener de una inversión durante un período determinado de tiempo.
- **Impuesto**: Son pagos que las personas y las empresas hacen al Estado para financiar los gastos públicos.
- **Liquidación de sueldo**: Es el documento que especifica el sueldo bruto, descuentos y sueldo líquido de un trabajador dependiente.
- **Trabajador dependiente**: Es aquel que trabaja para una empresa a través de un contrato y depende de ella para recibir un salario fijo.
- **Trabajador independiente**: Es aquel que trabaja por su cuenta y no depende de una empresa para recibir ingresos.

Servicios Tributarios

- **Servicios de impuestos internos (SII)**: Es la agencia gubernamental encargada de administrar y fiscalizar el sistema tributario en Chile.
- **Boletas de honorarios**: Es un documento legal que emite un trabajador independiente para cobrar sus servicios. Durante el 2024, cada vez se emite una boleta, la retención de impuestos es de un 13,75% del monto bruto. (Cada año sube un 0,75%)

Definiciones de Sueldo

- **Sueldo Bruto**: Ingreso íntegro antes de las retenciones
- **Sueldo Neto**: Ingreso que queda después del pago de impuestos y retenciones

Ejemplo: Boletas de Honorarios

Marcela es una trabajadora independiente que emite boletas de honorarios. Si Marcela desea recibir $500.000 de monto líquido, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al monto bruto que debe emitir Marcela en su boleta de honorarios?

a) $\$500.000 - 13.75\%$

b) $\$500.000 - 86.25\%$

c) $\dfrac{500.000}{13.75\%}$

d) $\dfrac{500.000}{86.25\%}$

Solución:

- **Datos:**
  - Monto líquido deseado: $500.000
  - Retención: 13.75% del monto bruto
- **Análisis:** Si llamamos B al monto bruto:
  - Retención = $0.1375 \cdot B$
  - Monto líquido = $B - 0.1375 \cdot B = B(1 - 0.1375) = B \cdot 0.8625$

  Queremos que el líquido sea $500.000:

$$500.000 = B \cdot 0.8625$$
$$B = \frac{500.000}{0.8625} = \frac{500.000}{86.25\%}$$

- **Respuesta correcta: d)** $\dfrac{500.000}{86.25\%}$

Tipos de Crédito

Crédito de Consumo

- Se otorgan a personas naturales
- Se deben pagar en un plazo de hasta 3 años
- Pueden ser de máximo 1.000 UF
- Facultan al titular del crédito a utilizar el dinero libremente

Crédito Hipotecario

- También están destinados a personas naturales
- Tienen por único objeto utilizarse para adquirir, construir, ampliar o reparar viviendas o refinanciar créditos hipotecarios existentes
- Están garantizados con una hipoteca sobre el bien raíz que se financiará

AFP (Administradora de Fondos de Pensiones)

La AFP es una entidad financiera privada que administra los fondos de pensiones de los trabajadores en Chile. Su función es recibir y administrar parte de la remuneración de los trabajadores en una cuenta individual, con el objetivo de que estos ahorros generen una rentabilidad a largo plazo y permitan el pago de una pensión cuando el trabajador jubile y, en caso de fallecimiento, se otorgue una pensión de sobrevivencia a quienes sean los respectivos beneficiarios.
Existen cinco tipos de fondos de pensiones, los cuales se diferencian por el tipo de inversiones que se pueden efectuar.

Tipos de Fondos de Pensiones

Fondo	Tipo de fondo
A	Más riesgoso
B	Riesgoso
C	Intermedio
D	Conservador
E	Más conservador

Recomendación

Se recomienda que, a menor edad, se invierta en un fondo más arriesgado. Y mientras más edad, en uno menos arriesgado.

Descuentos Legales

A los trabajadores dependientes se le realizan los siguientes descuentos en su renta imponible:

- **Pensión**: 10% + comisión por AFP
- **Salud**: 7% FONASA y al menos 7% ISAPRE
- **Impuesto a la renta**: Varía dependiendo del sueldo
- **Seguro de cesantía**: 0,6%

Ejemplo: Cálculo de Sueldo Líquido

Ricardo es un trabajador dependiente cuyo sueldo bruto es de $1.000.000. Su plan de salud le descuenta un 9,95%, además de tener seguro de cesantía (0,6%) y estar afiliado a la AFP Provida. ¿Cuál es el monto líquido que recibe Ricardo luego de los descuentos?

a) $120.000

b) $220.000

c) $780.000

d) $880.000

AFP	Comisión extra (%)
Modelo	0,58
Uno	0,69
Plan Vital	1,16
Habitat	1,27
Capital	1,44
Cuprum	1,44
Provida	1,45

Solución:

- **Datos:**
  - Sueldo bruto: $1.000.000
  - Salud: 9.95%
  - Seguro cesantía: 0.6%
  - AFP Provida: comisión 1.45%
  - Pensión base: 10%
- **Cálculo de descuentos:**
  1. **Pensión:** 10% + 1.45% = 11.45%
  $$1.000.000 \cdot 0.1145 = 114.500$$
  2. **Salud:** 9.95%
  $$1.000.000 \cdot 0.0995 = 99.500$$
  3. **Seguro cesantía:** 0.6%
  $$1.000.000 \cdot 0.006 = 6.000$$
- **Total descuentos:**
$$114.500 + 99.500 + 6.000 = 220.000$$
- **Sueldo líquido:**
$$1.000.000 - 220.000 = 780.000$$
- **Respuesta correcta: c) $780.000**

IV. Ejercicios de Admisiones pasadas

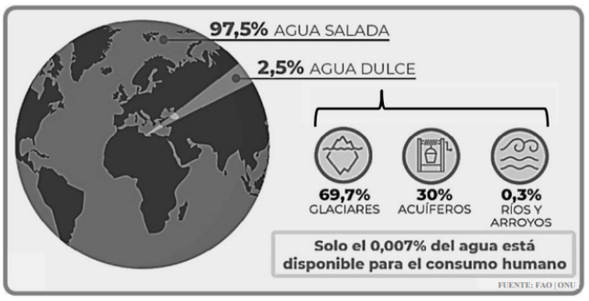
1) La tasa de inflación anual se define como la variación porcentual del Índice de Precios al Consumidor (IPC) de un mes respecto al mismo mes del año anterior. En cierto país, en abril de 2021 el IPC fue de 110 y en abril de 2022 fue de 121 , ¿cuál fue la tasa de inflación anual en el periodo descrito? **[PAES M1 Invierno 2024]**

a) $11\ \%$
b) $10\ \%$
c) $9\ \%$
d) $2,1\ \%$

2) En una tienda se vendieron 20 patitos de goma en un día. Si al día siguiente la cantidad de patitos de goma vendidos aumentó en un $5\ \%$, ¿cuántos patitos se vendieron ese día? **[PAES M1 Invierno 2024]**

a) 21
b) 24
c) 25
d) 30

3) En la siguiente infografía se presentan los porcentajes de los distintos tipos de agua que hay en la Tierra.



Adaptado de Carrión, M (s. f.). ¿Cuánta agua hay en el mundo? *El Ágora diario del agua*.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? **[PAES M1 Invierno 2024]**

a) Un 69,7 % del agua en el planeta está en los glaciares.
b) La mayor reserva de agua dulce en el planeta se encuentra en los glaciares.
c) Para determinar el % de agua que consume el ser humano de los ríos, se debe realizar la operación $0,007 \cdot 0,3$.
d) Hay más agua disponible en glaciares y acuíferos, en conjunto, que agua salada.

4) De acuerdo con un estudio del Instituto Nacional de Estadísticas (INE), el porcentaje de personas de 60 años o más que vive en Chile, respecto a la población total, ha ido aumentando progresivamente en las últimas décadas. Si bien en 1992 este grupo (60 años o más) equivalía al 9,5 % de la población total de habitantes del país, en 2022 aumentó al 18,1 % y se espera que en 2050 este grupo equivalga al 32,1 % de la población. Según los datos entregados por el INE, ¿en cuántos puntos porcentuales se estima que aumentará la población de 60 años o más del 2022 al 2050? **[PAES M1 Invierno 2024]**

a) 14,0
b) 27,6
c) 41,6
d) 50,2

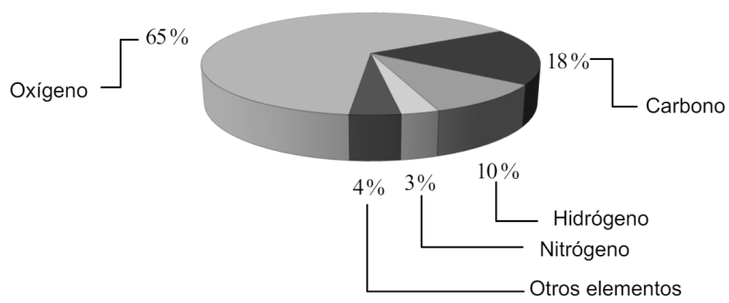
5) Si un estanque tiene agua hasta el $25\ \%$ de su capacidad, ¿en qué porcentaje se debe aumentar la cantidad de agua que hay en el estanque para completar su capacidad? **[PAES M2 Invierno 2024]**

a) En un $66,\overline{6}\%$
b) En un 75%
c) En un 300%
d) En un 400%

6) El largo de un rectángulo se aumenta en su 30 % y el ancho se disminuye en su 20 % obteniéndose un nuevo rectángulo. ¿En qué porcentaje varió el área del nuevo rectángulo con respecto al área del rectángulo original? **[PAES M2 Invierno 2023]**

a) 50 %
b) 10 %
c) 4 %
d) 6 %

7) En el gráfico adjunto se presenta la composición elemental del cuerpo humano.



Tal como en el ser humano, los cuatro elementos más abundantes en el resto de los organismos vivos son el Carbono, Hidrógeno, Oxígeno y Nitrógeno, y para recordar estos cuatro elementos es usual usar el acrónimo nemotécnico CHON. ¿Qué porcentaje de los elementos CHON en el cuerpo humano corresponde a Oxígeno? **[PAES M2 Regular 2023]**

a) $\frac{65}{100} \cdot 100\%$
b) $\frac{65}{32 \cdot 100}\%$
c) $\frac{65}{96} \cdot 100\%$
d) $\frac{65}{4 \cdot 100}\%$

8) Un banco garantiza una tasa de interés trimestral de 2,5 % para los depósitos a plazo. La función que modela el capital final que tendrá una persona luego de depositar es:

$$C = M(1 + N)^n$$

en la que M corresponde al capital inicial, N es la tasa de interés expresada como decimal y n es la cantidad de trimestres que se mantiene el dinero en el banco.
Si una persona hace un solo depósito inicial de $2.500.000 en ese banco, ¿cuál es la expresión que representa el capital final que tendrá esta persona después de 2 años? **[PAES M2 Regular 2023]**

a) $\$2.500.000 \cdot (1,25)^8$
b) $\$2.500.000 \cdot (1,025)^8$
c) $\$2.500.000 \cdot (1,25^8 - 1)$
d) $\$2.500.000 \cdot (1,025^8 - 1)$

9) Una persona hizo un depósito a plazo renovable a 30 días, con una tasa de interés del 0,3 % . Esta persona renovó el depósito por otros 30 días y la tasa de interés aumentó en un 100 % en este periodo, comparado con el periodo anterior. Si su depósito inicial era de $k, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la ganancia, en pesos, generada en estos dos periodos? **[PAES M2 Invierno 2024]**

a) $k \cdot 1,009$
b) $k \cdot 1,009 - k$
c) $k(1,003)(1,006)$
d) $k(1,003)(1,006) - k$

10) El sueldo líquido es el monto total que recibe una persona que trabaja, luego de descontar del total de haberes, las cotizaciones obligatorias y voluntarias del sueldo total imponible. Considera la siguiente liquidación de sueldo de una persona: **[PAES M2 Regular 2023]**

LIQUIDACIÓN DE SUELDO

DATOS DEL(A) TRABAJADOR(A)

RUT: 1*.*.***-8**
NOMBRE: ****a ****r *****s
Período de Remuneración: 31 días Mes: Enero Año: 2022

Haberes del Trabajador	Valor
Sueldo Base	$700 000
Horas Extras	$50 000
Aguinaldo	$50 000
Sueldo total imponible	$800 000
Bono de la empresa	$100 000
Movilización	$50 000
Sueldo total no Imponible	$150 000
Total de Haberes	$950 000

DESCUENTOS SUELDO IMPONIBLE	Valor
Cotización Previsional AFP (10 %)	$80 000
Cotización Salud (7 %)	$56 000
Cotización Voluntaria (a %)	X
TOTAL DESCUENTOS PREVISIONALES	Y

DETALLE DE REMUNERACIÓN

SUELDO LIQUIDO A PAGAR $Z

¿Cuál es la expresión que representa el sueldo líquido de esta persona en función del número "a" del porcentaje de cotización voluntaria, en pesos?

a) $950.000 \cdot \left(1 - \dfrac{(17+a)}{100}\right)$
b) $950.000 \cdot \left(\dfrac{1-(17+a)}{100}\right)$
c) $800.000 \cdot \left(1 - \dfrac{(17+a)}{100}\right) + 150.000$
d) $800.000 \cdot \left(\dfrac{1-(17+a)}{100}\right) + 150.000$

V. Ejercicios tipo PAES

11) Se deposita en una entidad bancaria un capital inicial de $ 10.000, con un interés compuesto mensual y no se realizan depósitos ni retiros posteriores. Se puede determinar la tasa de interés compuesto mensual, si se conoce:

(1) el capital final.
(2) el tiempo que estuvo depositado el capital inicial.

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas, (1) y (2)
d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
e) Se requiere información adicional

12) Marcos realiza un depósito de $ 500.000 en un banco a un interés simple mensual de 0,5%. ¿Qué ganancia obtendrá en un período de 3 años?

a) $7.500
b) $87.500
c) $90.000
d) $507.500
e) $590.000

13) ¿Qué capital debe invertirse en un negocio que rinde un interés simple anual de un 10%, para obtener $ 400.000 de utilidad en 2 años?

a) $8.400.000
b) $8.000.000
c) $4.000.000
d) $2.400.000
e) $2.000.000

14) Eduardo le vendió a su amigo Sebastián un libro de Sudoku en $ 5.600 con un 25% de ganancia. Entonces, Eduardo ganó

a) $\$1.020$
b) $\$1.120$
c) $\$1.400$
d) $\$4.200$
e) $\$4.480$

15) Si en un curso el puntaje en Matemática aumentó de una jornada a otra de 480 puntos a 540 puntos, entonces el porcentaje de aumento fue

a) 9%
b) $11,\overline{1}\%$
c) $12,5\%$
d) 30%
e) 60%

16) José recibe actualmente un sueldo mensual de $ 580.000 y el próximo mes éste será incrementado en un 5%. ¿Cuál será su nuevo sueldo?

a) $ 609.000
b) $ 619.000
c) $ 696.000
d) $ 870.000
e) $ 1.102.000

17) Eduardo le vendió a su amigo Sebastián un libro de Sudoku en $ 5.600 con un 25% de ganancia. Entonces, Eduardo ganó

a) $920
b) $1.020
c) $1.100
d) $1.120
e) $4.480

18) El precio de un artículo es $\$C$. Si este se aumenta en un 15% y luego se rebaja en un 10%, ¿por qué número se debe multiplicar C para obtener el nuevo precio?

a) $1,005$
b) $1,035$
c) $1,35$
d) $1,09$
e) $1,05$

19) Juan deposita en un Banco $ 10.000.000 a un interés simple trimestral del 4%. Al cabo de 9 meses, ¿cuánto es el capital final?

a) $10.200.000
b) $10.120.000
c) $11.020.000
d) $11.180.000
e) $11.200.000

20) ¿Cuál es la ganancia, en U.F., que se obtiene al cabo de 2 meses al depositar 2.000 U.F. a un interés compuesto mensual del 5%?

a) $ 250
b) $ 205
c) $ 200,5
d) $ 200
e) $ 195