



# Guía N°7 (M2)

## << Función Cuadrática >>

NOMBRE: \_\_\_\_\_

### I. Introducción

Las **expresiones algebraicas** son combinaciones de números, variables y operaciones matemáticas, como la suma, resta, multiplicación y división. Se representan mediante símbolos y letras, donde los números se consideran constantes y las letras representan variables, es decir, valores que pueden variar.

Producto Notable	Fórmula
Binomio al cuadrado	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Binomio al cubo	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Producto de binomios con término común (caso simple)	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Producto de binomios con término común (caso general)	$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Factorización	Fórmula General
Factor Común	$ab + ac = a(b + c)$
Agrupación	$ab + ac + db + dc = (a + d)(b + c)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Trinomio $x^2 + bx + c$	$x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n)$
Trinomio $ax^2 + bx + c$	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
Factor Por Signo	$-a - b = -(a + b)$





### II. Función Cuadrática

Anteriormente hemos trabajado con funciones lineales, las cuales se comportan gráficamente como una línea recta. Ahora estudiaremos la **función cuadrática**, que es una función polinomial de segundo grado de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde necesariamente se cumple que  $a \neq 0$ , y  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Esta describe un movimiento curvo muy particular llamado **parábola**.

#### Comparación entre Funciones Lineales y Cuadráticas

Función Lineal	Función Cuadrática
$f(x) = mx + n$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Cada imagen tiene una sola preimagen	Cada imagen tiene dos preimágenes (excepto en el vértice)
Si $m > 0$ , la función es creciente	Si $a > 0$ , la parábola abre hacia arriba
	
Si $m < 0$ , la función es decreciente	Si $a < 0$ , la parábola abre hacia abajo
	

#### Intersección con los Ejes

##### Intersección con el eje Y

La función cuadrática **siempre** corta al eje  $y$  cuando  $x = 0$ . El punto de intersección es:

$$(0, c)$$

Esto se debe a que  $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$ .

## Intersección con el eje X (Raíces o Ceros)

La función cuadrática **no siempre** corta al eje  $x$ . Para determinar el número de intersecciones utilizamos el **discriminante**:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si  $\Delta > 0$ : Dos intersecciones reales y distintas con el eje  $x$
- Si  $\Delta = 0$ : Una intersección real (la parábola es tangente al eje)
- Si  $\Delta < 0$ : Ninguna intersección real (la parábola no toca el eje  $x$ )

Las raíces se calculan mediante la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

## Propiedades de la Función Cuadrática

### Eje de Simetría

La parábola es simétrica respecto a una recta vertical que pasa por el vértice:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

### Vértice

Toda parábola tiene un punto máximo o mínimo llamado **vértice**, cuyas coordenadas son:

$$(x_v, y_v) = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \right)$$

- Si  $a > 0$ : El vértice es un **punto mínimo** absoluto
- Si  $a < 0$ : El vértice es un **punto máximo** absoluto

## Formas de Expresar una Función Cuadrática

### Forma Polinómica o Estándar

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Es útil para identificar los coeficientes y calcular el discriminante.

### Forma Canónica

Esta forma facilita identificar el vértice y el desplazamiento de la parábola:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Donde el vértice de la parábola se encuentra en el punto  $(h, k)$ .

### Forma Factorizada

Esta forma facilita el cálculo de las raíces:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son las soluciones (raíces) de la ecuación cuadrática.

### III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) Considera la función  $f$ , cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ . ¿Cuál de las siguientes funciones tiene como gráfica la parábola asociada a  $f$ , pero trasladada en 5 unidades hacia la derecha? [PAES M2 Regular 2025]

- a)  $g(x) = x^2 + 6x + 5$
- b)  $h(x) = x^2 - 4x$
- c)  $p(x) = x^2 + x + 5$
- d)  $q(x) = x^2 - 14x + 50$

2) Considera la función  $f$ , cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a < 0$ , ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera? [PAES M2 Regular 2025]

- a) La ordenada del vértice de la parábola asociada a la función  $f$  es el máximo de esta.
- b) La gráfica de la función  $f$  no interseca al eje X.
- c) La gráfica de la función  $f$  interseca al eje Y por debajo del origen.
- d) El recorrido de la función son todos los números reales negativos.
- e) El eje de simetría de la parábola asociada a  $f$  es el eje Y.

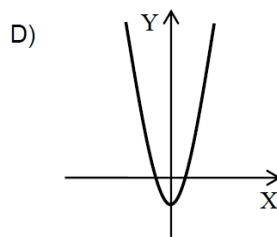
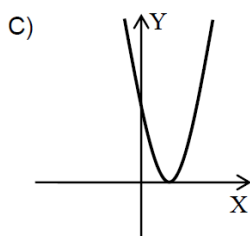
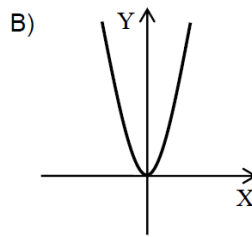
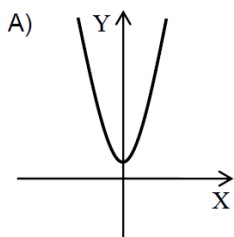
3) Considera la función  $f$ , definida por  $f(x) = \frac{x^2}{k} + 2x - 1$ , cuyo dominio es el conjunto de los números reales, con  $k$  un número real distinto de cero. Si la segunda coordenada del vértice de la parábola asociada a  $f$  es mayor que 1, ¿qué condición debe cumplir  $k$ ? [PAES M2 Regular 2025]

- a) Debe ser mayor que 2.
- b) Debe ser menor que 2 y mayor que 0.
- c) Debe ser menor que 0 y mayor que -2.
- d) Debe ser menor que -2.

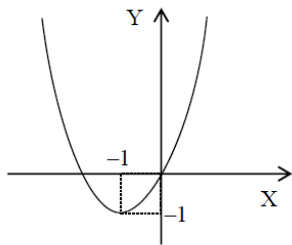
4) Considera la función  $f$ , definida por  $f(t) = t^3 - 25t^2 + 150t + 3$ , con dominio el conjunto de los números reales. ¿Cuál de las siguientes opciones representa todos los valores de  $t$  para los que  $f(t) = 3$ ? [PAES M2 Regular 2025]

- a) 0, 10, 15
- b) 0, -10, -15
- c) 3, -7, -12
- d) 0

5) Considera la función cuadrática  $f$ , cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Si los coeficientes  $b$  y  $c$  son cero, ¿cuál de los siguientes gráficos podría corresponder a la gráfica asociada a  $f$ ? [PAES M1 Regular 2025]



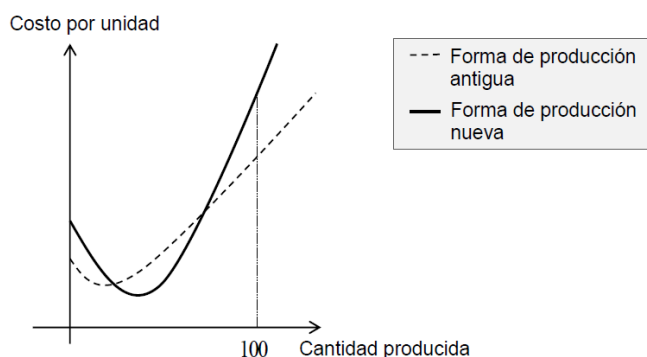
6) La parábola de la figura representa la gráfica de la función  $f$ , con dominio el conjunto de los números reales, definida por  $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ .



Si a esta parábola se le aplica una reflexión con respecto al eje  $Y$ , luego una traslación según el vector  $(0, 1)$ , ¿cuál es la función que corresponde a la gráfica que se obtiene? [PAES M1 Regular 2024]

- a)  $g(x) = x^2 + 1$
- b)  $h(x) = (x - 1)^2$
- c)  $t(x) = x^2 - 1$
- d)  $s(x) = (x - 1)^2 + 1$
- e)  $r(x) = (x + 1)^2 + 1$

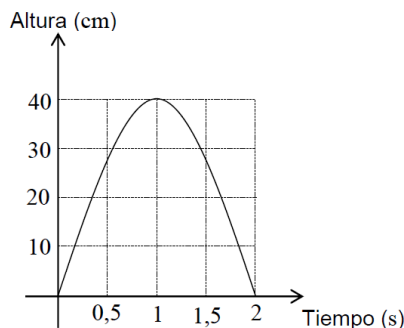
7) Una empresa está estudiando los efectos de cambiar su forma de producción a una nueva. Con ambas formas de producción, el costo por unidad de producir  $x$  unidades se modela a través de una función cuadrática. En el siguiente gráfico se representa el costo de producción por unidad de ambas formas de producción:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera al comparar ambas formas de producción? [PAES M1 Regular 2024]

- a) Siempre es más conveniente cambiar a la forma de producción nueva.
- b) El costo de producir cero productos es igual en ambas formas de producción.
- c) Cuando se producen más de cien unidades, la forma de producción antigua genera un menor costo por unidad.
- d) El menor costo por unidad posible de la forma de producción antigua es menor que el menor costo por unidad posible de la forma de producción nueva

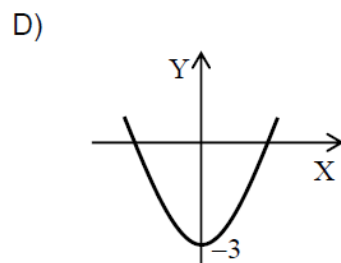
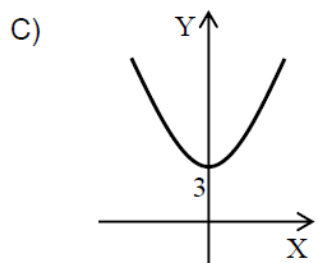
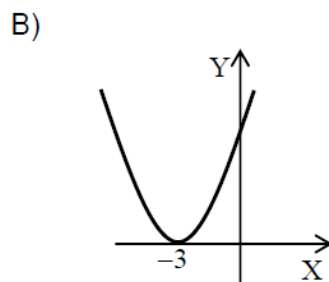
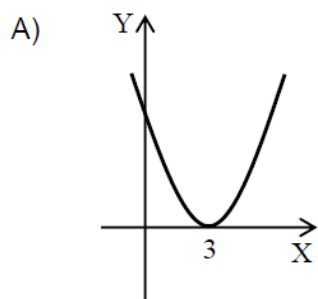
8) La altura que alcanza el salto de un tipo de grillo puede representarse por medio de la siguiente parábola:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones se puede deducir del gráfico? [PAES M1 Regular 2024]

- a) En 0,75 s, el grillo está a 30 cm de altura
- b) En 1 s, el grillo alcanza su mayor altura.
- c) Solo a los 1,5 s, el grillo alcanza una altura de 30 cm.
- d) A los 3 s, el grillo está bajo tierra.

9) ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función  $f$  definida por  $f(x) = (x + 3)^2$ , con dominio el conjunto de los números reales? [PAES M1 Regular 2023]



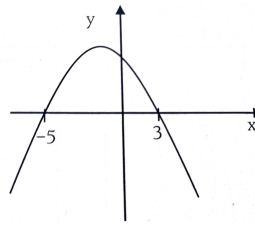
10) ¿Cuál de las siguientes condiciones para  $m$  permite asegurar que las soluciones de la ecuación  $mx^2 + mx + 2 = 0$ , en  $x$ , no sean números reales? [PAES M2 Regular 2023]

- a)  $m < 0$
- b)  $m \leq \sqrt{8}$
- c)  $m \leq 8$
- d)  $-8 < m < 0$
- e)  $0 < m < 8$

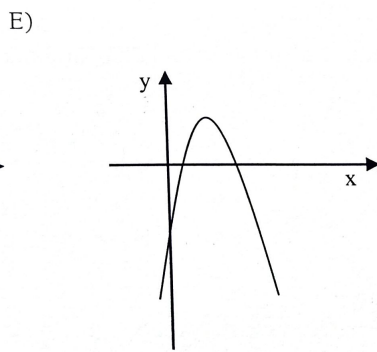
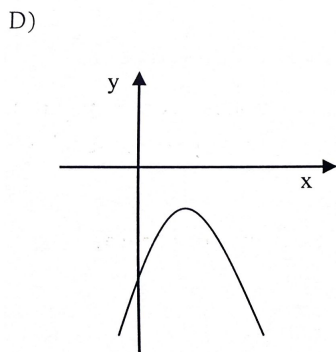
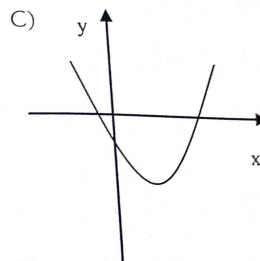
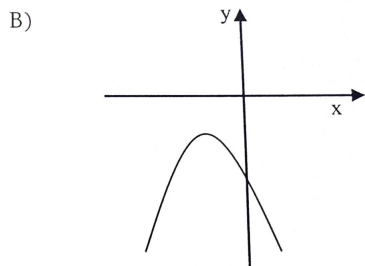
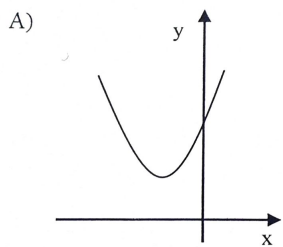
#### IV. Ejercicios tipo PAES

11) ¿Cuál de las siguientes funciones representa mejor a la gráfica dada?

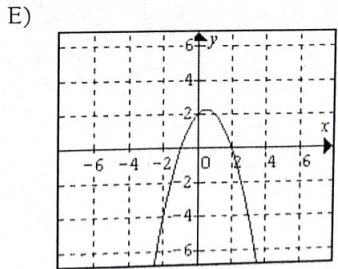
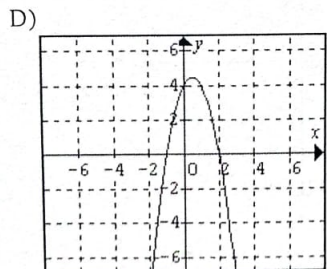
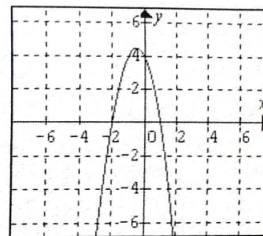
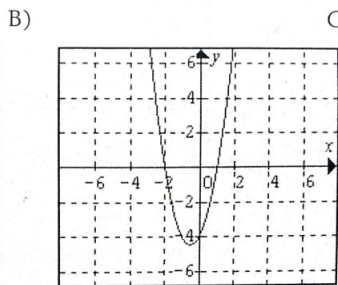
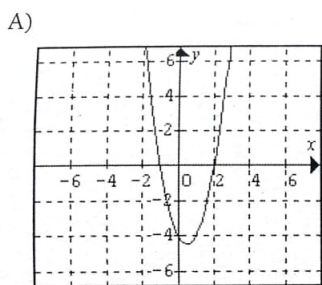
- a)  $y = -(3 - x)(x - 5)$
- b)  $y = (x - 5)(x + 3)$
- c)  $y = -(x + 5)(x - 3)$
- d)  $y = -(x - 5)(x + 3)$
- e)  $y = (x + 5)(x - 3)$



12) ¿Cuál de los siguientes gráficos es el que mejor corresponde a la función  $f(x) = 2 - (x - 2)^2$ ?



13) El gráfico de la función  $f(x) = -2(x + 1)(x - 2)$  está representado en



14) Dada la función real  $f$ , definida por la fórmula  $f(x) = -2x^2 + (a + 1)x + 1$ , con  $a \neq -1$ , ¿cuál es el valor máximo que alcanza?

- a)  $x = \frac{a^2 + 2a + 9}{8}$
- b)  $x = \frac{a + 1}{4}$
- c)  $x = \frac{a^2 - 2a + 7}{8}$
- d)  $x = \frac{a + 1}{2}$
- e)  $x = \frac{a^2 + 2a + 9}{4}$

15) Para la función  $f(x) = a(x - m)^m + n$ , con dominio en los números reales, con  $a$ ,  $m$ , y  $n$  números reales distintos de cero, cuyo vértice está en  $(4,2)$  e interseca al eje  $y$  en  $t$ , ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) FALSA(S)?

- I) Si  $a > 0$ , entonces la parábola podría intersectar en dos puntos al eje  $x$ .
- II)  $m = a$  y  $n = 2$ .
- III) Si  $a = -2$ , entonces  $t = 30$ .

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) Solo I y II
- d) Solo I y III
- e) I, II y III

16) La ecuación de la parábola que tiene vértice en el punto  $(-1,-2)$  y que pasa por el punto  $(-4,25)$  es

- a)  $y = 3x^2 - 6x + 1$
- b)  $y = 3x^2 + 6x + 1$
- c)  $y = -3x^2 - 6x + 1$
- d)  $y = -3x^2 + 6x - 1$
- e)  $y = 3x^2 + 6x - 1$

17) Dada la función  $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ , con dominio en el conjunto de los números reales, ¿cuál de las alternativas es FALSA?:

- a) El máximo valor que alcanza la función es  $-3$ .
- b) Su eje de simetría es  $x=1$ .
- c) Sus ramas se orientan hacia abajo.
- d) Intersecta al eje  $x$  en dos puntos distintos
- e) Es creciente en  $]-\infty, 1[$

18) Para las funciones  $f(x) = 2x^2 - 1$ ,  $g(x) = 2x^2 + 8x$  y  $h(x) = -2x^2 + bx - 1$ , con  $b$  un número real, es **FALSO** que

- a)  $f(x)$  y  $g(x)$  tienen la misma forma y concavidad.
- b) para cualquier valor de  $b$ , las funciones  $f$  y  $h$  intersectan al eje  $y$  en  $-1$ .
- c) la parábola representada por  $g(x)$  pasa por el punto  $(0,0)$ .
- d) los ejes de simetría de  $f$  y  $g$  están igualmente distanciados con respecto a la recta  $x = -1$
- e) si  $b = 0$ , entonces  $h(x)$  es el reflejo de  $f(x)$  con respecto al eje  $x$ .

19) Se puede afirmar que la función  $h(x) = d(x - p)^2 + q$ ,  $d \neq 0$ , interseca al eje de abscisas en dos puntos distintos si se conoce que:

- (1)  $d < 0$  y  $q > 0$
- (2) Su vértice es  $(p, 8)$  y  $p \neq 0$

- a) (1) por sí sola
- b) (2) por sí sola
- c) Ambas juntas, (1) y (2)
- d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
- e) Se requiere información adicional

20) Se puede determinar la ecuación de una parábola de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , si se sabe que:

- (1) Pasa por los puntos  $(0, 0)$  y  $(8, 0)$ .
- (2) Tiene un mínimo valor en el punto  $(4, -12)$ .

- a) (1) por sí sola
- b) (2) por sí sola
- c) Ambas juntas, (1) y (2)
- d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
- e) Se requiere información adicional