Guía N°1 (M1)

<< Números Naturales y Enteros >>

NOMBRE: ____

I. Introducción

Un **conjunto numérico** es un grupo de números que comparten ciertas propiedades y cumplen reglas específicas dentro del sistema numérico. Estos conjuntos nos permiten clasificar y organizar los números según su naturaleza y comportamiento. Los principales conjuntos numéricos son:

- **Números naturales** ($\mathbb{N}$): $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
- **Números enteros** ($\mathbb{Z}$): $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- **Números racionales** ($\mathbb{Q}$): fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.
- **Números irracionales** ($\mathbb{Q}^*$): aquellos que no pueden expresarse como fracción, como π o $\sqrt{2}$.
- **Números reales** ($\mathbb{R}$): la unión de racionales e irracionales.

II. Números Naturales($\mathbb{N}$)

Los **números naturales** ($\mathbb{N}$) son el primer conjunto numérico que los humanos utilizamos. Son los números que usamos para contar objetos, expresar cantidades y ordenar elementos. Históricamente, los números naturales fueron los primeros en surgir en la evolución de la matemática, ya que permitieron a las civilizaciones antiguas llevar registros, hacer comercio y organizar sus recursos. Formalmente, el conjunto de los números naturales se define como:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ..., (n-1), n, (n+1), ..., +\infty\}$$

Cifras

Un número natural se construye con cifras, que son símbolos utilizados para representar cantidades en distintos sistemas de numeración.

$$\text{Cifras} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Elemento Algebraico

Un número natural también se puede expresar mediante un término algebraico ***n***, el cual representa cualquier número natural.

$$\text{Elemento Algebraico} = n \in \mathbb{N}$$

Adición o Suma

La adición o suma es una operación matemática que consiste en combinar dos o más números para obtener un resultado llamado suma o total.

$$\underbrace{a}_{\text{Sumando}} + \underbrace{b}_{\text{Sumando}} = \underbrace{c}_{\text{Suma}}$$

- La suma de dos naturales **siempre** resulta otro natural.
- El orden de los sumandos **no** altera el resultado.

Sustracción o Resta

La sustracción o resta es una operación matemática que consiste en quitar o reducir una cantidad de otra.

$$\underbrace{a}_{\text{Minuendo}} - \underbrace{b}_{\text{Sustraendo}} = \underbrace{c}_{\text{Diferencia}}$$

- En los Naturales, el Minuendo debe ser **siempre** mayor que el Sustraendo.
- El orden de los elementos **sí altera** el resultado.

Antecesor y Sucesor

El **antecesor** de un número entero es el inmediato anterior en la recta numérica ($n-1$), mientras que el **sucesor** es el inmediato posterior ($n+1$).

El sucesor de n es $n+1$. Por ejemplo:

- Sucesor de 5 es 6.
- Sucesor de 0 es 1.
- Sucesor de $n+3$ es $n+4$.

El antecesor de n es $n-1$. Por ejemplo:

- Antecesor de 5 es 4.
- Antecesor de 11 es 10.
- Antecesor de $n+3$ es $n+2$.

Multiplicación

La multiplicación es una operación matemática que consiste en sumar un número consigo mismo varias veces.

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ veces}} = c$$

- La multiplicación de dos naturales siempre resulta otro número.
- El producto siempre es múltiplo de sus factores.
- La multiplicación es una suma iterada de un mismo número.

Pares e Impares

Números Pares

Un número natural n es par si puede escribirse como $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$.

- Ejemplos:
  $2, 4, 6, 8, \ldots, (2n-4), (2n-2), 2n, (2n+2), (2n+4), \ldots$

Números Impares

Un número natural n es impar si puede escribirse como $n = 2k+1$ con $k \in \mathbb{N}$.

- Ejemplos:
  $1, 3, 5, 7, \ldots, (2n-3), (2n-1), (2n+1), (2n+3), \ldots$

División

La división es una operación matemática que consiste en repartir una cantidad en partes iguales o encontrar cuántas veces un número cabe dentro de otro. Consiste en cuántas veces cabe el divisor en el dividendo.

$$\underbrace{a}_{\text{Dividiendo}} \div \underbrace{b}_{\text{Divisor}} = \underbrace{c}_{\text{Cociente}}$$

- La división es la operación inversa a la multiplicación.
- "a" debe ser múltiplo de "b" para ser una división natural.

Reglas de paridad

Las reglas de paridad permiten identificar si un número es par o impar según sus propiedades.

Suma y Resta	**Par**	**Impar**
Par	Par	Impar
Impar	Impar	Par

- Par $+$ Par $=$ Par (ej. $4+2=6$)
- Impar $+$ Impar $=$ Par (ej. $3+5=8$)
- Par $+$ Impar $=$ Impar (ej. $4+3=7$)

Multiplicación y División	**Par**	**Impar**
Par	Par	Par
Impar	Par	Impar

- Par $\times$ Par $=$ Par (ej. $2 \times 4 = 8$)
- Par $\times$ Impar $=$ Par (ej. $2 \times 3 = 6$)
- Impar $\times$ Impar $=$ Impar (ej. $3 \times 5 = 15$)

Múltiplos y Divisores

Múltiplos

Los múltiplos de un número natural son todos los posibles resultados de multiplicar ese número por todos y cada uno de los números naturales.

- Ejemplo: $3 = \{3, 6, 9, 12, 15, ...\}$

Divisores

Los divisores de un número natural son los números naturales que lo pueden dividir, resultando de cociente otro número natural y de resto 0.

- Ejemplo: $100 = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$

Primos y Compuestos

Primos

Son los números naturales, mayores que 1, cuyos únicos factores son 1 y sí mismo. El único primo y par es 2.

- Ejemplos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...$

Compuestos

Son los números naturales, mayores que 1, los cuales no son primos. Es decir, poseen más factores que sólo 1 y sí mismo.

- Ejemplos: $4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, ...$

Reglas de Divisibilidad

Las reglas de divisibilidad son criterios que nos permiten determinar si un número es divisible entre otro sin necesidad de hacer la división.

N°	Descripción	Ejemplo	Explicación
2	Si termina en cifra par.	32	Donde 2 es una cifra par.
3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.	15	$1 + 5 = 6$ (6 es múltiplo de 3).
4	Si sus dos últimas cifras son 00 ó múltiplo de 4.	64	64 es múltiplo de 4 ($16 \times 4 = 64$).
5	Si termina en 0 ó en 5.	25	25 termina en 5.
6	Si es divisible por 2 y 3 a la vez.	30	30 termina en 0 (divisible por 2) y $3 + 0 = 3$ (divisible por 3).
8	Si sus tres últimas cifras son 000 ó múltiplo de 8.	808	$101 \times 8 = 808$.
9	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.	945	$9 + 4 + 5 = 18$ (18 es múltiplo de 9).
10	Si termina en 0.	110	110 termina en 0.

Mínimo Común Múltiplo (MCM)

En un conjunto de números, es el menor número natural que es múltiplo de todos los elementos del conjunto.

M.C.M (6, 8):

$$\begin{array}{cc|l} 6 & 8 & :2 \\ \hline 3 & 4 & :2 \\ 3 & 2 & :2 \\ 3 & 1 & :3 \\ 1 & & \end{array}$$

$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

M.C.M. (6, 8) $= 24$

> **Nota:** El proceso continúa hasta que todos los números se reducen a 1. El MCM se obtiene multiplicando todos los divisores utilizados.

Máximo Común Divisor (MCD)

En un conjunto de elementos, es el natural mayor que es divisor de cada uno de ellos.

M.D.M (6,8):

$$\begin{array}{cc|l} 6 & 8 & :2 \\ \hline 3 & 4 & :3 \\ 1 & 4 & :4 \\ & 1 & \end{array}$$

M.D.M. (6, 8) $= 2$

> **Nota:** Se seleccionan solo los divisores comunes a todos los números. Cuando ya no hay divisores comunes, el proceso termina y se multiplican los divisores seleccionados.

III. Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

Los **números enteros** ($\mathbb{Z}$) son una extensión de los números naturales que incluye tanto los positivos como los negativos y el cero. Este conjunto numérico surge históricamente como solución a problemas de sustracción donde el minuendo es menor que el sustraendo. El conjunto de los números enteros se define como:

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, +\infty\}$$

- **Enteros positivos**: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- **Enteros negativos**: $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$
- **Cero**: 0 (elemento neutro aditivo)

Antecesor y Sucesor en los Números Enteros

El **antecesor** de un número entero es el inmediato anterior en la recta numérica ($n - 1$), mientras que el **sucesor** es el inmediato posterior ($n + 1$).

Sucesores

- Sucesor de 5 es 6
- Sucesor de -3 es -2

Antecesores

- Antecesor de 8 es 7
- Antecesor de -5 es -6

Opuestos en los Números Enteros

El **opuesto** (o inverso aditivo) de un número entero n es el único elemento $-n$, es decir, con el signo contrario u opuesto.

- $4 \to -4$
- $-7 \to 7$
- $0 \to 0$

Valor Absoluto en los Números Enteros

El **valor absoluto** de un entero x, denotado por $|x|$, es la distancia métrica entre x y el origen (cero) en la recta numérica. Formalmente:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

Entrada	Valor Absoluto	Explicación
5	$\lvert 5\rvert = 5$	Número positivo permanece igual
-3	$\lvert -3\rvert = 3$	Signo negativo se elimina

Reglas Básicas para Sumar y Resta de Enteros

Mismo signo: Para sumar enteros de igual signo, se suman los valores absolutos y se conserva el signo común.

$$(-5) + (-2) = -(5+2) = -7$$

Signos diferentes: Para sumar valores de distinto signo, se restan los valores absolutos y se conserva el signo del sumando de mayor valor absoluto.

$$(-8) + (5) = -(8-5) = -3$$

Reglas de Signos en Multiplicación y División

Las reglas de signos determinan el signo del resultado en operaciones binarias entre números positivos $(+)$ y negativos $(-)$, preservando la estructura algebraica de los números enteros.

$\times$ **o** $\div$	**Positivo**	**Negativo**
Positivo	$+$	$-$
Negativo	$-$	$+$

- Positivo × Positivo = Positivo (2 × 3 = 6)
- Positivo × Negativo = Negativo (4 × (-2) = -8)
- Negativo × Positivo = Negativo ((-5) × 3 = -15)
- Negativo × Negativo = Positivo ((-6) × (-4) = 24)

Pares e Impares en los Números Enteros

Números Pares

Un número natural n es par si puede escribirse como $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$.

- Ejemplos:
  $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots, 2n, (2n+2), (2n+4), \ldots$

Números Impares

Un número natural n es impar si puede escribirse como $n = 2k+1$ con $k \in \mathbb{N}$.

- Ejemplos:
  $\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots, (2n-1), (2n+1), (2n+3), \ldots$

No se aplican los Primos y Compuestos en los Números Enteros

No se aplican MCM y MCD en los Números Enteros

IV. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) ¿Cuál es la diferencia entre 6 y $-2(-3-5)$? **[PSU 2012]**

a) -64
b) 5
c) -10
d) 0
e) 2

2) $-\left(-1+\dfrac{1}{2}\right)+1=$ **[PSU 2012]**

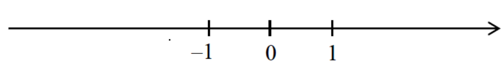
a) $\dfrac{5}{2}$
b) $\dfrac{3}{2}$
c) $\dfrac{1}{2}$
d) $-\dfrac{3}{2}$
e) $-\dfrac{1}{2}$

3) ¿Cuál(es) de las siguientes operaciones da(n) como resultado el número 2? **[PTU 2020]**

I) $\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{14}{6}$.
II) $\dfrac{22}{5}:\dfrac{5}{11}$.
III) $\dfrac{10}{4}-\dfrac{2}{4}$.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y III
e) I, II y III

4) Considera la siguiente recta numérica:



¿Cuál de los siguientes procedimientos representa la operación $-5+(-8)$ usando la recta numérica? **[PAES 2025]**

a) Ubicarse en el -5 y desplazarse 8 unidades a la izquierda.
b) Ubicarse en el -5 y desplazarse 8 unidades a la derecha.
c) Ubicarse en el -8 y desplazarse 5 unidades a la derecha.
d) Ubicarse en el -8 y desplazarse 3 unidades a la derecha.

5) Para encontrar el resultado de $\left(\frac{4}{5}\cdot(4\cdot 3-6)\right):\left(\frac{5}{3}\cdot(12-2\cdot 4)\right)$, se realiza el siguiente procedimiento, cometiéndose un error.

Paso 1: se resuelven las operaciones de los paréntesis internos, obteniéndose

$$\left(\frac{4}{5}\cdot(-12)\right):\left(\frac{5}{3}\cdot 40\right).$$

Paso 2: se resuelven las multiplicaciones, obteniéndose

$$-\frac{48}{5}:\frac{200}{3}.$$

Paso 3: se resuelve la división como

$$-\frac{48}{5}\cdot\frac{3}{200}.$$

Paso 4: se resuelve la multiplicación, obteniéndose

$$-\frac{18}{125}.$$

¿En cuál de los pasos se cometió el error? **[PAES 2025]**

a) En el Paso 1
b) En el Paso 2
c) En el Paso 3
d) En el Paso 4

6) ¿Cuál(es) de las siguientes operaciones da(n) por resultado la unidad? **[PSU 2014]**

I) $\frac{7}{12} + \frac{5}{12}$

II) $\frac{7}{12} \cdot \frac{12}{7}$

III) $\frac{13}{12} : \frac{12}{13}$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y II
e) I, II y III

7) Una persona necesita comprar 60 kg de alimento de cierta marca para sus perros. En una tienda para mascotas, ese alimento tiene los siguientes precios:

- El saco de 20 kg se vende a $33.500.
- El saco de 15 kg se vende a $25.000.
- El saco de 12 kg se vende a $20.000.
- El saco de 5 kg se vende a $10.000.

Si la persona requiere priorizar en primer lugar el menor precio a pagar y luego la menor cantidad de sacos, ¿cuál de las siguientes opciones le conviene a la persona? **[PAES 2025]**

a) Comprar doce sacos de 5 kg .
b) Comprar cinco sacos de 12 kg .
c) Comprar cuatro sacos de 15 kg .
d) Comprar tres sacos de 20 kg .

8) Dos personas se juntan a realizar ejercicios, pero cada una tiene su propia rutina, las que se detallan a continuación:

- La primera persona realiza ejercicios durante 2 minutos y luego se toma 30 segundos de descanso, repitiendo esta serie ocho veces.
- La segunda persona realiza ejercicios durante 1 minuto y 30 segundos y luego se toma 15 segundos de descanso, repitiendo esta serie doce veces.

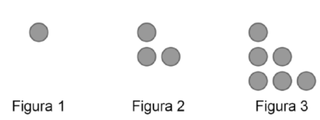
Si las dos personas comienzan sus rutinas al mismo tiempo, ¿cuál de los siguientes argumentos garantiza que una de las personas termina la rutina antes que la otra? **[PAES 2025]**

a) Que la cantidad de repeticiones de las series de ambas personas es distinta.
b) Que el tiempo de descanso de ambas personas es distinto.
c) Que la suma entre el tiempo de ejercicio, el descanso y las repeticiones de las series es distinta en cada persona.
d) Que la suma entre el tiempo de ejercicio y el descanso, multiplicada por las repeticiones de las series, es distinta en cada persona.

9) Una persona recorrió en bicicleta una ruta de 30 km en 3 días. El primer día recorrió $1/3$ de la ruta, el segundo día recorrió $3/5$ de lo que le faltaba y el tercer día recorrió el resto. ¿Cuántos kilómetros recorrió el tercer día? **[PAES 2025]**

a) 15
b) 10
c) 8
d) 2

10) Considera la siguiente secuencia de figuras:



Si el patrón de formación se mantiene, ¿cuántos círculos forman la Figura 7? **[PAES Invierno 2025]**

a) 18
b) 21
c) 28
d) 36

1.	C	2.	B	3.	D	4.	A	5.	A
6.	D	7.	C	8.	D	9.	C	10.	C

V. Ejercicios tipo PAES

11) En un colegio los cursos A y B tienen 40 y 32 alumnos, respectivamente. Si para un trabajo se divide cada curso en grupos, considerando que el número de éstos deben ser iguales en ambos cursos, en todos los grupos, ¿cuál es la mayor cantidad de alumnos por grupo que es posible formar sin que sobren alumnos en ningún grupo?

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 9

12) Jorge jugaba a lanzar un dado y hacer girar una "perinola matemática" en cuyas caras aparecen operaciones. Los lanzó juntos y calculó el puntaje al sumar los tres valores obtenidos. La primera vez en el dado salió un 5 y en la perinola salió "el doble del número", la segunda vez le salió un 6 en el dado y la frase "el triple del opuesto del número" y la tercera vez salió 2 en el dado y en la perinola "el cuadrado del número". ¿Cuántos puntos obtuvo Jorge al final?

a) -4
b) -18
c) -28
d) 12
e) 0

13) De los \$40.000 que tenía Benjamín, la cuarta parte la guardó en su billetera, otra cuarta parte la utilizó para pagar unas cuentas y el resto lo apostó en el casino de juegos, de modo que por cada \$4.000 que jugó recuperó \$1.000. ¿Cuánto dinero tiene en total ahora Benjamín?

a) \$5.000
b) \$10.000
c) \$15.000
d) \$20.000
e) \$25.000

14) En la Final del Mundial de fútbol, el equipo ganador de la Copa derrotó al equipo que quedó segundo por 3 goles a 2. ¿Qué fracción de los goles convirtió el equipo ganador?

a) $3/2$
b) $2/3$
c) $3/5$
d) $5/3$
e) $2/5$

15) Si m y n son números positivos enteros, tales que m es múltiplo de 6 y n es múltiplo de 10. Entonces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)?

I) $m + n$ es múltiplo de 16.
II) $m \cdot n$ es múltiplo de 15.
III) El máximo común divisor entre m y n es 2.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) Solo II y III

16) $3 - 2 \cdot (2 \cdot 3 - 2 \cdot 4) =$

a) -29
b) -15
c) -2
d) 2
e) 7

17) Con respecto a $|-18|$ se puede afirmar que

a) $|-18| < 18$
b) $|-18| > 18$
c) $|-18| = 18$
d) $|-18| = (-18)$
e) $|-18| < -18$

18) $[-3+(-5)\cdot 6]:(-3)=$

a) -16
b) -11
c) 9
d) 11
e) 16

19) $-2\cdot\{3|-4-1|-|-2|\}=$

a) -34
b) -26
c) -19
d) 26
e) 34

20) Una niña tiene 6 cajas vacías y quiere colocar una o más fichas en cada una de ellas, de tal forma que todas las cajas tengan un número distinto de fichas. ¿Cuál es el número mínimo de fichas que necesita?

a) 6
b) 15
c) 21
d) 27
e) 36

21) Si las letras del abecedario representan a los primeros números naturales de menor a mayor respectivamente, entonces es correcto afirmar que:

I) $c+c=b\cdot c$
II) $b(a+b)=b+c$
III) $c+ab=a\cdot b\cdot c$

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III

22) El sucesor de la suma de dos números naturales consecutivos es siempre número:

I) múltiplo de dos.
II) par.
III) impar.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y II
e) Ninguna de las anteriores.

23) El antecesor de $(2n+3)$ es 8, entonces el sucesor de $(3n-2)$ es:

a) 7
b) 8
c) 9
d) 16
e) 20

24) La suma de 3 pares consecutivos es 72. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor?

a) 2
b) 4
c) 22
d) 24
e) 26

25) Si m y n son números pares, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones representan siempre un número par?

I) $(m+1)(n+1)$
II) $m(n+1)$
III) $(m-1)(n+2)$

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III