



Guía N°2 (M1)

<< Números Racionales >>

NOMBRE: _____

I. Introducción

Un **conjunto numérico** es un grupo de números que comparten ciertas propiedades y cumplen reglas específicas dentro del sistema numérico. Estos conjuntos nos permiten clasificar y organizar los números según su naturaleza y comportamiento. Los principales conjuntos numéricos son:

- **Números naturales** (\mathbb{N}): $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- **Números enteros** (\mathbb{Z}): $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- **Números racionales** (\mathbb{Q}): fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.
- **Números irracionales** (\mathbb{Q}^*): aquellos que no pueden expresarse como fracción, como π o $\sqrt{2}$.
- **Números reales** (\mathbb{R}): la unión de racionales e irracionales.

II. Números Racionales(\mathbb{Q})

Los números racionales (\mathbb{Q}) son un conjunto numérico fundamental en matemáticas que surge de la necesidad de expresar cantidades fraccionarias y divisiones no exactas entre números enteros. A diferencia de los números naturales, que solo representan cantidades discretas, los racionales permiten describir partes de un todo, relaciones proporcionales y mediciones más precisas.

Un número racional es cualquier número que puede expresarse como el **cociente** de dos números enteros a y b , donde $b \neq 0$. Matemáticamente:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Fracciones

Una **fracción** es una forma de representar una **división entre dos números**. Se expresa como el cociente de dos números enteros:

$$\frac{a}{b}$$

donde:

- a se llama **numerador** (indica cuántas partes se toman).
- b se llama **denominador** (indica en cuántas partes se divide el todo, $b \neq 0$).

Fracción Propia

Una **fracción propia** es aquella donde el **numerador es menor que el denominador** ($a < b$). Representa una cantidad **menor que la unidad**.

Ejemplos: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$

Fracción Impropia

Una **fracción impropia** tiene el **numerador mayor o igual que el denominador** ($a \geq b$). Representa una cantidad **igual o mayor que la unidad**.

Ejemplos: $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{9}{7}$

Representación de \mathbb{N} y \mathbb{Z} en \mathbb{Q}

Todos los números racionales (\mathbb{Q}) contienen a los números naturales (\mathbb{N}) y enteros (\mathbb{Z}). Todo número natural $n \in \mathbb{N}$ puede expresarse como una fracción con denominador 1:

$$n = \frac{n}{1} \quad (\text{ejemplo: } 5 = \frac{5}{1})$$

Opuesto de un número racional

Dado un número racional $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, su **opuesto** (o inverso aditivo) es el número que sumado a él da cero:

$$\text{Opuesto} \left(\frac{a}{b} \right) = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$$

Ejemplo:

$$\text{Opuesto} \left(\frac{3}{4} \right) = -\frac{3}{4} \quad \text{porque} \quad \frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4} \right) = 0$$

Inverso de un número racional

Dado $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ con $a \neq 0$, su **inverso** o **recíproco** (o inverso multiplicativo) es el número que multiplicado por él da uno:

$$\text{Inverso} \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{b}{a}$$

De Fracción a Decimal

Para convertir $\frac{a}{b}$ a decimal, divide el numerador (a) entre el denominador (b):

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

Ejemplo 1:

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0.75 \quad (\text{decimal exacto})$$

Ejemplo 2:

$$\frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1.\bar{6} \quad (\text{decimal periódico})$$

Propiedad de Densidad en \mathbb{Q}

Los números racionales son **densos** en sí mismos: entre dos racionales distintos cualesquiera, siempre existen infinitos racionales.

Fracciones Equivalentes

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes (\equiv) si representan el mismo número racional:

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

Multiplicar o dividir el numerador y denominador por un mismo entero $k \neq 0$ genera una fracción equivalente:

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{a \times k}{b \times k} \equiv \frac{a \div j}{b \div j}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \equiv \frac{4}{6} \equiv \frac{6}{9} \quad (\text{todas representan } 0.\bar{6})$$
$$\frac{18}{24} \equiv \frac{18 \div 6}{24 \div 6} \equiv \frac{3}{4} \quad (\text{todas representan } 0.75)$$

Tipos de Decimales

Tipo	Descripción	Ejemplo
Exacto	Número finito de cifras	$\frac{1}{2} = 0.5$
Periódico puro	Una o más cifras se repiten infinitamente	$\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$
Periódico mixto	Parte decimal no periódica + parte periódica	$\frac{5}{6} = 0.8\bar{3}$

De decimales a fracción

Decimales Exactos

Para decimales con un número finito de cifras decimales:

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Número completo sin coma}}{\text{Un 1 seguido por tantos ceros como cifras decimales}}$$

Ejemplo 1:

$$0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 2:

$$2.125 = \frac{2125}{1000} = \frac{17}{8}$$

Decimales Periódicos Puros

Para decimales donde todas las cifras decimales se repiten:

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Número completo sin coma} - \text{Parte entera}}{\text{Tantos 9 como cifras periódicas}}$$

Ejemplo 1:

$$0.\bar{3} = \frac{3 - 0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 2:

$$0.\overline{12} = \frac{12 - 0}{99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

Decimales Semi Periódicos

Para decimales con parte no periódica y periódica:

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Número completo sin coma} - \text{Parte no periódica}}{\text{Tantos 9 como cifras periódicas} + \text{Tantos ceros como cifras no periódicas}}$$

Ejemplo 1:

$$0.1\bar{6} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

Ejemplo 2:

$$0.23\overline{45} = \frac{2345 - 23}{9900} = \frac{2322}{9900} = \frac{129}{550}$$

Suma o Resta de Fracciones con Mismo Denominador

Se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3 + 1}{5} = \frac{4}{5} \qquad \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4 - 1}{7} = \frac{3}{7}$$

Suma o Resta de Fracciones con Distinto Denominador

1. Hallar el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores
2. Convertir a fracciones equivalentes con el MCM como denominador
3. Sumar los numeradores

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \qquad \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

Multiplicación de Fracciones

Se multiplican numeradores con numeradores y denominadores con denominadores:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

División de Fracciones

Se multiplica por el inverso del divisor:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

De Fracción a Número Mixto

Toda fracción impropia puede expresarse como **número mixto** (entero + fracción propia):

$$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

1. Dividir numerador por denominador: $5 \div 2 = 2$ con resto 1
2. El cociente es el entero (2), el resto es el nuevo numerador (1)
3. Mantener el mismo denominador (2)

De Número Mixto a Fracción

$$q\frac{r}{b} = \frac{(q \times b) + r}{b}$$

1. Multiplicar el entero por el denominador
2. Sumar el numerador
3. Conservar el mismo denominador

Ejemplo:

$$1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$2\frac{5}{8} = \frac{21}{8}$$

Tipos de fracciones

Tipo	Definición	Ejemplo
Propia	Numerador < denominador	$\frac{2}{3}$
Impropia	Numerador \geq denominador	$\frac{7}{4}$
Equivalentes	Distinta forma, mismo valor	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
Decimal	Resulta en decimal finito/periódico	$\frac{1}{4} = 0.25$
Mixta	Entero + fracción propia	$1\frac{1}{2}$

Prioridad de Operaciones

El orden de las operaciones es una regla que indica la secuencia correcta de pasos para evaluar una expresión matemática.

Nivel	Regla	Operación
1	PA	Paréntesis
2	PO	Potencias y Raíces
3	MU-D	Multiplicación y División
4	AS	Suma y Resta

III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) ¿Cuál es el valor de $5 - (-2)(-2 - 7)$? [PAES Invierno 2025]

- a) -63
- b) -13
- c) -5
- d) 8

2) ¿Cuál es el resultado de $-\left(\frac{3}{8} : \frac{6}{16}\right) - \frac{8}{3}$? [PAES Invierno 2025]

- a) $-\frac{11}{3}$
- b) -3
- c) $\frac{11}{3}$
- d) 3

3) ¿Cuál es el resultado de $3 - (-1)(-1 - 5)$? [PAES Regular 2024]

- a) -1
- b) -3
- c) -12
- d) -24

4) El resultado de $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{7}\right)$, truncado a la décima es [PSU 2014]

- a) 0,1
- b) 0,2
- c) 0,3
- d) 0,8
- e) 0,7

5) Un diario tiene una colilla recortable para un concurso, la que se presenta a continuación:

CUADRADO MÁGICO			
1	♥	♪	
3	2		
		3	☺
		1	

Cada fila, cada columna y cada diagonal deben contener los números 1, 2, 3 y 4 sin que se repitan.

Manda el resultado correcto de
♥ + ☺ + ♪
a la casilla postal de este diario para entrar al concurso de una bicicleta

Resultado

Nombre _____

Número contacto _____

¿Cuál es el resultado que permite entrar al concurso? [PAES Regular 2024]

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9

6) Si al quintuplo de -10 se le resta el triple de -12, ¿qué número se obtiene? [PAES Regular 2024]

- a) -86
- b) -14
- c) 2
- d) 34

7) ¿En cuál de las siguientes opciones se representa la frase “el doble de la tercera parte de la diferencia entre 8 y 6”? [PAES Regular 2024]

- a) $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 - 6$
- b) $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (8 - 6)$
- c) $2 \cdot 3 \cdot 8 - 6$
- d) $2 \cdot 3 \cdot (8 - 6)$

8) En la siguiente tabla se presentan las fechas de algunos hechos históricos:

Hecho histórico	Año
Construcción de la Gran Pirámide de Guiza	2570 a.C.
Nacimiento de Cleopatra	69 a.C.

¿Cuántos años pasaron desde el año de la construcción de la Gran Pirámide de Guiza hasta el año del nacimiento de Cleopatra? [PAES Regular 2024]

- a) 2640
- b) 2639
- c) 2501
- d) 2499

9) Un colegio de enseñanza media tiene 180 estudiantes en total y un sexto de ellos pertenece al segundo medio B. El día en que el segundo medio B realizó la elección de su directiva, faltó la décima parte de los estudiantes de dicho curso. Quienes asistieron votaron entre Fernando y Josefina para la presidencia. Si $\frac{1}{3}$ de los estudiantes votaron por Josefina y no hubo votos nulos ni blancos, ¿cuántos estudiantes votaron por Fernando? [PAES Regular 2024]

- a) 20
- b) 18
- c) 2
- d) 1

10) En la figura se presenta un cartel con los precios de las impresiones en blanco y negro de un centro de impresión.

IMPRESIONES B y N	
Lista de precios	
Cantidad de hojas	Precio por hoja
de 1 a 99 hojas.....	\$ 30
de 100 a 149 hojas...	\$ 25
150 o más.....	\$ 20

Un curso de Química Orgánica requiere de un libro de tres capítulos de 150 , 130 y 85 hojas, en ese orden. Una persona imprimió primero solo el primer capítulo, luego solo el segundo y por último solo el tercero, a medida que avanzaba en el curso. ¿Cuánto dinero gastó la persona en imprimir el libro? [PAES Regular 2024]

- a) \$7300
- b) \$8150
- c) \$8800
- d) \$9450

1.	B	2.	A	3.	B	4.	E	5.	C
6.	B	7.	B	8.	C	9.	B	10.	C

IV. Ejercicios tipo PAES

11) $0,1 \cdot 0,01 \cdot 0,001 =$

- a) 0,0001
- b) 0,00001
- c) 0,000001
- d) 0,0000001
- e) 0,00000001

12) ¿Cuál de las siguientes alternativas representa una fracción que puede ser escrita como decimal infinito periódico?

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{3}{27}$
- c) $3\frac{7}{8}$
- d) $\frac{9}{90}$
- e) $\left(\frac{8}{7}\right)^{-1}$

13) ¿Cuántos octavos tiene el resultado de $2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4}$?

- a) 25
- b) 50
- c) 15
- d) 8
- e) 4

14) $\frac{1 + \frac{1}{2}}{0,1 + \frac{0,3}{4^{-1}}} =$

- a) $\frac{15}{13}$
- b) $\frac{60}{7}$
- c) $\frac{15}{121}$
- d) $\frac{6}{43}$
- e) $\frac{45}{43}$

15) Si cada hoja del primer tomo de una enciclopedia tiene un grosor de 0,012 cm y las tapas poseen, cada una, un espesor equivalente a 40 de esas hojas, ¿cuál será el grosor total de ese tomo si son 320 hojas?

- a) 3,84 cm
- b) 0,048 cm
- c) 4,32 cm
- d) 0,384 cm
- e) 4,8 cm

16) El doble de los dos tercios de los tres cuartos de los cuatro quintos de los cinco cuartos de la unidad, es lo mismo que

- a) el sucesor de la unidad.
- b) el doble de la unidad.
- c) la cuarta parte de la unidad.
- d) la mitad de la unidad.
- e) el recíproco de la unidad.

17) ¿Cuál de las siguientes opciones **NO** representa un número entero?

- a) $0,\overline{9}$
- b) $\frac{0,21}{0,07}$
- c) $(0,5)^{-1}$
- d) $0,2 - \frac{21}{5}$
- e) $\frac{(0,2)^{-1}}{10^2}$

18) Con respecto a los números reales, es **siempre** correcto afirmar que

- I) la unidad tiene 100 centésimas.
- II) todo número decimal se puede escribir como fracción.
- III) la raíz cuadrada de un número negativo es un número negativo.

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) Solo I y II
- d) Solo I y III
- e) Solo II y III

19) Supongamos que p es un número entero positivo y que q es un número racional positivo cualquiera, no entero, expresado como cociente de dos números enteros. ¿Cuál de las siguientes alternativas permite asegurar que pq es siempre un entero mayor o igual que 1?

- a) El denominador de q es múltiplo de p .
- b) El denominador de q es factor de p .
- c) q es una fracción impropia y p es un número primo.
- d) El numerador de q es menor que p .
- e) El producto entre p y el numerador de q es un factor del denominador de q .

20) Se puede asegurar que la fracción $\frac{a}{b}$ corresponde a un número racional si:

- (1) a y b son números enteros.
- (2) b es un número cualquiera distinto de cero.

- a) (1) por sí sola
- b) (2) por sí sola
- c) Ambas juntas, (1) y (2)
- d) Cada una por sí sola, (1) o (2)
- e) Se requiere información adicional

21) ¿Cuál de las siguientes relaciones de orden es correcta?

- a) $4,\overline{6} > \frac{17}{9} > \frac{16}{6}$
- b) $\frac{16}{6} > 4,\overline{6} > \frac{17}{9}$
- c) $\frac{14}{3} > \frac{16}{6} > 1,\overline{8}$
- d) $\frac{16}{6} > 1,\overline{8} > \frac{14}{3}$
- e) $\frac{17}{9} > \frac{16}{6} > \frac{14}{3}$

22) El valor de $\frac{1}{3}$, aproximado por exceso a la décima, es equivalente a la fracción

- a) $\frac{2}{3}$
- b) $\frac{3}{10}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{2}$
- e) $\frac{2}{5}$

23) Si $\frac{11}{7}$ truncado a la décima es m , entonces m^2 redondeado a la décima es

- a) 2,2
- b) 2,6
- c) 2,3
- d) 2,4
- e) 2,5

24) Si a , b y c son números positivos, tales que $\frac{a}{b} < \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, ¿cuál de las siguientes relaciones es **siempre** verdadera?

- a) $a < b < c$
- b) $c < a < b$
- c) $c < b < a$
- d) $a < c < b$
- e) Faltan datos para determinarlo.

25) $\frac{-2}{3} : \left(2 - \frac{7}{6}\right) - 4 \cdot \left(\frac{-3}{5}\right) =$

- a) 1,6
- b) 2,2
- c) 0,4
- d) -0,2
- e) 3,2