



# Guía (M2) N° 1

## << Expresiones Algebraicas >>

NOMBRE: \_\_\_\_\_

### I. Introducción

Las **expresiones algebraicas** son combinaciones de números, variables y operaciones matemáticas, como la suma, resta, multiplicación y división. Se representan mediante símbolos y letras, donde los números se consideran constantes y las letras representan variables, es decir, valores que pueden variar.

### II. Expresiones Algebraicas

Una **expresión algebraica** es una combinación de:

- **Variables** (letras que representan valores desconocidos):  $x, y, z$
- **Constantes** (números fijos):  $2, -5, \frac{1}{2}, \pi$
- **Operaciones matemáticas**:  $+, -, \times, \div$

#### Términos Algebraicos

Un término algebraico es una expresión matemática simple que contiene números y letras (variables), sin sumas ni restas. Está compuesto por un signo (positivo o negativo), un factor numérico (coeficiente) y un factor literal (variable con su exponente).

#### Expresiones Algebraicas según el número de términos

- **Monomio**: Un término ( $7x^2y$ )
- **Binomio**: Dos términos ( $3x - 5$ )
- **Trinomio**: Tres términos ( $x^2 + 5x - 7$ )
- **Polinomio**: Dos o más términos ( $4x^3 - x^2 + x - 8$ )

#### Grado de una Expresión Algebraica

El grado de un término algebraico es la suma de los exponentes de sus variables. En una expresión algebraica es el mayor grado entre sus términos.

Por ejemplo:  $3x^2y^3$  tiene grado  $2 + 3 = 5$ .

#### Reducción de Términos Semejantes

Términos son semejantes cuando tienen:

- Las mismas variables
- Los mismos exponentes para cada variable

$$\text{Ejemplo: } 2x + 3y - 5x + y = (2x - 5x) + (3y + y) = -3x + 4y$$

#### Productos Notables

Los **productos notables** son expresiones algebraicas que siguen patrones específicos y aparecen frecuentemente en el álgebra. Su conocimiento permite simplificar cálculos y factorizar expresiones.

#### Binomio al Cuadrado

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

*Demostración:*

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

*Ejemplo:*

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

## Suma por Diferencia (Diferencia de Cuadrados)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

*Demostración:*

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 \\ = a^2 - b^2$$

*Ejemplo:*

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$$

## Binomio al Cubo

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

*Ejemplo:*

$$(2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 - 1^3 \\ = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

## Producto de Binomios con Término Común (Caso Simple)

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

*Ejemplo:*

$$(x + 4)(x + 2) = x^2 + (4 + 2)x + (4)(2) \\ = x^2 + 6x + 8$$

## Producto de Binomios con Término Común (Caso General)

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

*Ejemplo:*

$$(3x + 2)(2x - 5) = (3)(2)x^2 + [3(-5) + 2(2)]x + (2)(-5) \\ = 6x^2 + (-15 + 4)x - 10 \\ = 6x^2 - 11x - 10$$

## Suma de Cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

*Ejemplo:*

$$8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 \\ = (2x + 3)((2x)^2 - (2x)(3) + 3^2) \\ = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$$

## Diferencia de Cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

*Ejemplo:*

$$64y^3 - 125 = (4y)^3 - 5^3 \\ = (4y - 5)((4y)^2 + (4y)(5) + 5^2) \\ = (4y - 5)(16y^2 + 20y + 25)$$

## Tabla Resumen

Producto Notable	Fórmula
Binomio al cuadrado	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Binomio al cubo	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Producto de binomios con término común (caso simple)	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Producto de binomios con término común (caso general)	$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

### III. Factorización Algebraica

La **Factorización Algebraica** se produce cuando se convierte una suma o resta de términos en un producto de factores más simples. Se logra identificando elementos comunes, usando identidades notables o agrupando términos, logrando así expresiones equivalentes más simples pero representadas como multiplicación.

#### Factor Común

$$ab + ac = a(b + c)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 6x^2y + 9xy^2 - 3xy &= 3xy(2x) + 3xy(3y) - 3xy(1) \\ &= 3xy(2x + 3y - 1) \end{aligned}$$

#### Agrupación de Términos

$$ab + ac + db + dc = a(b + c) + d(b + c) = (a + d)(b + c)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4xy - 3xy - 6y^2 &= 2x(x + 2y) - 3y(x + 2y) \\ &= (2x - 3y)(x + 2y) \end{aligned}$$

#### Trinomio Cuadrado Perfecto

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 \\ &= (x + 3)^2 \end{aligned}$$

#### Trinomio de la Forma $(x^2 + bx + c)$

$$x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n)$$

Ejemplo:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) \quad \text{pues } 2 + 3 = 5 \text{ y } 2 \times 3 = 6$$

#### Trinomio de la Forma $(ax^2 + bx + c)$

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 7x - 3 &= 6x^2 + 9x - 2x - 3 \quad (\text{descomposición } 9 \times -2 = -18) \\ &= 3x(2x + 3) - 1(2x + 3) \\ &= (3x - 1)(2x + 3) \end{aligned}$$

#### Factor Por Signo

$$-a - b = -(a + b)$$

Ejemplo:

$$-x^2 + 2x - 3 = -(x^2 - 2x + 3)$$

#### Tabla Resumen

Tipo	Fórmula General
Factor Común	$ab + ac = a(b + c)$
Agrupación	$ab + ac + db + dc = (a + d)(b + c)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Trinomio $x^2 + bx + c$	$x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n)$
Trinomio $ax^2 + bx + c$	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
Factor Por Signo	$-a - b = -(a + b)$

## IV. Fracciones Algebraicas

Una **fracción algebraica** es una expresión que representa el cociente entre dos expresiones algebraicas, es decir, una división donde el numerador y/o el denominador contienen variables. Los productos notables y la factorización se ocupan frecuentemente al operar con fracciones algebraicas.

$$\text{Ejemplo: } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x+3)}{(x^2-2x-15)} = \frac{(x+3)}{(x-5)(x+3)} = \frac{1}{(x-5)}$$

**Observación:** al trabajar con fracciones algebraicas hay que tener en cuenta los valores que NO pueden tomar las variables. En este ejemplo, la variable  $x$  no puede tomar los valores 5 y -3 pues ellos hacen cero el denominador, dejando indefinido el valor de la fracción.

### Simplificación

Una fracción se considera simplificada cuando no hay factores en común entre numerador y denominador.

$$\text{Ejemplo: } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x}{4x^2-5ax} = \frac{3x}{x(4x-5a)} = \frac{3}{(4x-5a)} \quad \text{para todo } x \neq \frac{5a}{4}$$

### Multiplicación y División

Operamos del mismo modo que las fracciones aritméticas, es decir, si A, B, C y D son expresiones algebraicas entonces:

$$\text{Ejemplo: } \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \quad \text{y} \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

### Adición y Sustracción

Si las fracciones tienen el mismo denominador, se suman (o restan) los numeradores y se conserva el denominador común:

$$\text{Ejemplo: } \frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D \pm C \cdot B}{B \cdot D}$$

## V. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) ¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a  $25x^2 - y^2$ ? [PAES M2 Invierno 2025]

- a)  $(5x - y)^2$
- b)  $(25x - y)(x + y)$
- c)  $25(x + y)(x - y)$
- d)  $(5x + y)(5x - y)$

2) ¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a  $(p - 2)^3 - p(p + 1)^2$ ? [PAES M2 Regular 2025]

- a)  $-8 - p$
- b)  $-8p^2 + 11p - 8$
- c)  $-4p^2 + 3p - 8$
- d)  $-6 - 2p$

3) Si  $mx^2 - mp^2 = 1$  y  $x - p = m$ , entonces  $(x + p)^2 =$  [PSU 2005]

- a) 1
- b)  $\frac{1}{m}$
- c)  $\frac{1}{m^2}$
- d)  $\frac{1}{m^3}$
- e)  $\frac{1}{m^4}$

4) Si  $a$  y  $b$  son constantes, ¿cuál debe ser el valor de  $b$  para que se cumpla la igualdad  $x^2 - 5x + 6 = (x + a)^2 + b$ ? [PAES M2 Invierno 2025]

- a)  $-\frac{1}{4}$
- b)  $-\frac{13}{2}$
- c) 6
- d)  $\frac{13}{2}$

5) Si  $n$  es un número natural, al desarrollar la expresión  $(3^{n-3} - 3^{n-2})^2$  resulta: [PSU 2007]

- a)  $2 \cdot 3^{2(n-3)}$
- b)  $-2 \cdot 3^{(n-3)}$
- c)  $4 \cdot 3^{2(n-3)}$
- d)  $16 \cdot 3^{2(n-3)}$
- e)  $-8 \cdot 3^{2(n-3)}$

6) Si en los números reales se definen las operaciones  $a \otimes b = a^2 + 2ab + b^2$  y  $m \triangle n = m^2 - 2mn + n^2$ , entonces el valor de  $(4 \triangle 3) - (3 \otimes 5)$  es igual a [PSU 2013]

- a) 33
- b) 47
- c) 63
- d) -27
- e) -63

7) Una persona recorre en su vehículo una distancia de 700 km en 10 horas y media. El recorrido está dividido en tres tramos. El primero y el último son de asfalto y tienen una longitud de 250 km y 245 km, respectivamente, y cada uno de estos los recorre con una rapidez media de 90 km/h. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la rapidez media del vehículo en el segundo tramo, en km/h? [PAES M2 Invierno 2025]

- a)  $\frac{90 \cdot 495 \cdot 205}{250 \cdot 245}$   
 b)  $\frac{205}{10.5 - \frac{495}{90}}$   
 c)  $\frac{700 - 495 \cdot 90}{205}$   
 d)  $\frac{10.5 \cdot 700 - 495 \cdot 90}{205}$

8) ¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a  $x(x+2)\left((x-2) + \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 4)\right)$ ? [PAES M2 Invierno 2026]

- a)  $\frac{x}{3}(x+2)^2(x-1)$   
 b)  $\frac{x}{3}(x^2-4)(x-1)$   
 c)  $\frac{x}{3}(x-2)^2(x+3)$   
 d)  $x(x^2-4) + \frac{1}{3}(x^2-2x+4)$

9) Si  $(x+5) \cdot P = x^2 - x - 30$ , con  $x \neq -5$ , ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a  $P$ ? [PAES M1 Regular 2025]

- a)  $x - 35$   
 b)  $x^2 - 6$   
 c)  $x + 6$   
 d)  $x - 6$

10) Se tienen dos números reales positivos, tal que  $x^2 + y^2 = 6xy$ , con  $x > y$ , ¿cuál es el valor de la expresión  $\frac{x+y}{x-y}$ ? [PSU 2014]

- a)  $2\sqrt{2}$   
 b)  $\sqrt{2}$   
 c)  $\sqrt{2}/2$   
 d) 2  
 e) Ninguno de los anteriores.

1.	D	2.	B	3.	E	4.	A	5.	C
6.	E	7.	B	8.	A	9.	D	10.	B

## VI. Ejercicios tipo PAES

11) Al multiplicar el binomio  $a - 1$  con el trinomio  $a^{n-1} + a^n + a^{n+1}$  se obtiene

- a)  $a^{n-1} + 2a^n + 2a^{n+1} + a^{n+2}$
- b)  $a^{n+2} - a^{n-1}$
- c)  $a - 1 + a^{n-1} + a^n + a^{n+1}$
- d)  $a^n + 1$
- e)  $a^n - 1$

12) La fracción  $\frac{a^2 - a - 12}{16 - a^2}$ , con  $a \neq \pm 4$ , es igual a

- a)  $\frac{a + 3}{-4 + a}$
- b)  $\frac{a - 3}{4 + a}$
- c)  $\frac{a + 3}{4 - a}$
- d)  $\frac{a + 3}{4 + a}$
- e)  $\frac{-3 - a}{4 + a}$

13) ¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a una factorización **INCORRECTA**?

- a)  $a^2 + ac + b^2 - bc = (a - b)(a + b + c)$
- b)  $p^4 + 2p^2 + 1 = (p^2 + 1)^2$
- c)  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$
- d)  $t^3 - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 1)$
- e)  $-121 + \frac{1}{y^2} = \left(\frac{1}{y} + 11\right)\left(\frac{1}{y} - 11\right)$

14) Si  $t^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2$ , entonces  $t$  es igual a

- a)  $2x - 5y$
- b)  $2x + 5y$
- c)  $2x + 25y^2$
- d)  $20xy$
- e)  $7(x + y)$

15)  $(m + n)^2 + 2(m + n)(m - n) + (m - n)^2 =$

- a)  $m^2$
- b)  $n^2$
- c)  $m^2 + n^2$
- d)  $4m^2$
- e)  $4n^2$

16) Si la base de un triángulo isósceles mide  $(12d - 4c)$  y su perímetro es  $(18d - 2c)$ , entonces el lado del triángulo mide

- a)  $3d + c$
- b)  $3d - 3c$
- c)  $6d + 2c$
- d)  $6d - 6c$
- e)  $30d - 6c$

17) La expresión  $4x^2 - 12xy + 9y^2$  puede corresponder a

- I) El área de un cuadrado de lado  $2x - 3y$ .
- II) El área de un triángulo de base  $4x - 6y$  y altura  $2x - 3y$ .
- III) El área de un rectángulo de lados  $2x - 3y$  y  $2x + 3y$ .

- a) Solo I
- b) Solo I y II
- c) Solo I y III
- d) Solo II y III
- e) I, II y III

18) Si factorizamos el trinomio  $3x^2 + 14x - 24$  es un producto de dos factores, se obtiene

- a)  $(3x + 3)(x - 8)$
- b)  $(3x + 4)(x - 6)$
- c)  $(3x + 14)(3x - 24)$
- d)  $(3x - 4)(x + 6)$
- e)  $(3x + 8)(x - 3)$

19) Si la suma de los cuadrados de dos números positivos es 15 y el producto entre ellos es 5, ¿cuánto vale la suma de tales números?

- a) 25
- b) 5
- c)  $\sqrt{20}$
- d) 20
- e) No se puede determinar.

20) Si  $n$  y  $p$  son números naturales y  $S = 2^{2n} - 4^{p+n}$  ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) siempre equivalente(s) a  $S$ ?

- I)  $2(1^{2n} - 2^{p+n})$ .
- II)  $4^n(1 - 2^p)(1 + 2^p)$ .
- III)  $(2^n - 2^{p+n})^2$ .

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) Solo III
- d) Solo I y II
- e) Solo II y III

21)  $\frac{5t^2 + 3t - 2}{2 - 5t} =$

- a)  $-t + 1$
- b)  $-t - 1$
- c)  $1 + 3t$
- d)  $t + 1$
- e)  $3t - 1$

22)  $\frac{-12q + 12p}{3p - 3q} =$

- a)  $-\frac{1}{4}$
- b) 4
- c) -4
- d)  $\frac{-4q + 4p}{p - 3}$
- e)  $4p - 4q$

$$23) \frac{x^2 + 7x - 18}{x^2 + 2x - 63} =$$

- a)  $\frac{x+2}{x-7}$
- b)  $\frac{x-2}{x+7}$
- c)  $\frac{x-2}{x-7}$
- d)  $-x$
- e)  $-1$

$$24) \frac{y}{x} - \frac{x}{y} =$$

- a)  $-1$
- b)  $0$
- c)  $\frac{2y-2x}{xy}$
- d)  $\frac{xy}{x^2-y^2}$
- e)  $-\frac{xy}{x^2-y^2}$

$$25) \frac{5z}{xy} - \frac{6x}{yz} =$$

- a)  $-zx$
- b)  $-\frac{1}{y^2}$
- c)  $\frac{5z-6x}{y}$
- d)  $\frac{5z^2-6x^2}{xyz}$
- e)  $\frac{6x^2-5z^2}{xyz}$