Guía N°5 (M1)

$<<$ Raíces $>>$

NOMBRE: ____

I. Introducción

Un **conjunto numérico** es un grupo de números que comparten ciertas propiedades y cumplen reglas específicas dentro del sistema numérico. Estos conjuntos nos permiten clasificar y organizar los números según su naturaleza y comportamiento. Los principales conjuntos numéricos son:

- **Números naturales** ($\mathbb{N}$): $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- **Números enteros** ($\mathbb{Z}$): $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- **Números racionales** ($\mathbb{Q}$): fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.
- **Números irracionales** ($\mathbb{Q}^*$): aquellos que no pueden expresarse como fracción, como π o $\sqrt{2}$.
- **Números reales** ($\mathbb{R}$): la unión de racionales e irracionales.

II. Raíces

Las raíces son la operación contraria a la potencia, por ejemplo, si elevamos un número a la potencia de 3, y posteriormente, aplicamos la raíz de índice 3, el número se mantiene exactamente igual.
En la expresión:

$$\sqrt[3]{a^3} = (a^3)^{\frac{1}{3}} = a^{3 \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$$

De este modo, una raíz de índice n, es una potencia de exponente $\frac{1}{n}$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Raíces Enésimas

En la expresión:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

- $\sqrt{\ }$ es el símbolo de la raíz o radical.
- n es el índice de la raíz.
- a es el radicando o cantidad subradical.
- b es la raíz enésima de a.

Propiedades de las Raíces

Conversión de raíz a potencia

La raíz de un número puede expresarse como una potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[6]{4^3} = 4^{\frac{3}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Multiplicación de raíces de igual índice

1) La raíz de un producto es igual al producto de las raíces, del mismo índice, de los factores.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

División de raíces de igual índice

2) La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces, del mismo índice, del dividendo y divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Raíz de una raíz

3) La raíz de una raíz es otra raíz cuyo índice es igual al producto de los índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$$

Potencia de una raíz

4) La raíz de una potencia es igual a la raíz de la base elevada al exponente.

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$$

Introducir factores en un radical

5) Para introducir un factor dentro de una raíz, se eleva el factor al índice de la raíz.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Ejemplo:

$$5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{250}$$

Cambio de índice

6) Una raíz se puede transformar en otra equivalente, amplificando o simplificando por un número natural k.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{5} = \sqrt[2]{5} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{25}$$

Raíz Cuadrada

Definición

La raíz cuadrada de un **número real no negativo** y es otro **número real no negativo** x, tal que el cuadrado de este último es igual al primero.

$$\text{Si: } y = x^2 \quad \text{Entonces: } \sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x|$$

Propiedad Fundamental

Para todo número real a:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

- La raíz cuadrada de a^2 es el valor absoluto de a.
- Esto cumple con la regla de multiplicidad: **negativo** $\times$ **negativo** = **positivo**.
- Potencias de base negativa con exponente par son siempre positivas.

Casos Particulares

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & ; \text{si } x \geq 0 \\ -x & ; \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Nota: Es un error afirmar que $\sqrt{16} = \pm 4$. La definición exige un resultado no negativo:

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = |4| = 4$$

Ejemplos y Excepciones

- Raíz quinta de un positivo:
$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad \text{porque } 2^5 = 32$$
- Raíz par de un negativo:
$$\sqrt[4]{-16} \quad \text{No existe en los números reales.}$$
- Para una variable x:
$$\sqrt{x^2} = \pm x \quad \text{(depende del valor desconocido de } x\text{)}$$

Importante

- La raíz cuadrada principal siempre devuelve un valor no negativo.
- Para **ecuaciones** como $x^2 = 16$, las soluciones son $x = \pm 4$, pero $\sqrt{16} = 4$.

Raíz Cuadrada: Racionalización de Denominadores

Contextualización

Los matemáticos prefieren evitar raíces en los denominadores por considerarlo “poco estético” o “inadecuado”. Por ello, el proceso de **racionalización** consiste en eliminar las raíces del denominador, convirtiéndolas en expresiones racionales.

- El objetivo es remover el irracional (la raíz) del denominador, dejando un número racional.

Racionalización con Raíz Cuadrada

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Pasos:

1. Multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{a}$ (la raíz del denominador).
2. Simplificar usando $\sqrt{a^2} = a$.

Racionalización con Raíz Enésima

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

Pasos:

1. Multiplicar por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ para que el exponente total en el denominador sea n (i.e., $m + (n - m) = n$).
2. Simplificar usando $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Racionalización con Binomio de Raíces

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

Pasos:

1. Multiplicar por el conjugado $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (cambio de signo).
2. Aplicar diferencia de cuadrados: $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$.

Ejemplos Adicionales

- **Raíz cuadrada:**
$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$
- **Raíz cúbica:**
$$\frac{2}{\sqrt[3]{7}} = \frac{2\sqrt[3]{7^2}}{7}$$
- **Binomio:**
$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) Si $x = a^2$ y $a = 2\sqrt{2}$, entonces x es igual a **[PSU 2011]**

a) 16
b) 8
c) 4
d) 2
e) $4\sqrt{2}$

2) La expresión $\sqrt[3]{a^2} : (\sqrt[3]{a})^{-1}$ es equivalente a **[PSU 2011]**

a) $\sqrt[3]{a}$
b) $\frac{1}{a}$
c) -1
d) $-\sqrt[3]{a}$
e) a

3) Si x es un número real mayor que 1, entonces $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2$ es igual es **[PSU 2016]**

a) 0
b) 2
c) $2x - \sqrt{x^2-1}$
d) $2x - 2\sqrt{x^2-1}$
e) $2x$

4) ¿Cuál de las siguientes igualdades es verdadera? **[PSU 2013]**

a) $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt[3]{3} = 1$
c) $\sqrt{10} - \sqrt{6} = 2$
d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt{3}$
e) $\sqrt{(-1)^2} = -1$

5) ¿Cuál(es) de los siguientes números multiplicados por $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ da(n) como resultado un número racional? **[PSU 2013]**

I) $2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
II) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
III) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y II
d) Solo I y III
e) I, II y III

6) $\sqrt{0,\overline{4}} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}} =$ **[PSU 2012]**

a) $0,2 \cdot x$
b) $\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}}$
c) $\sqrt{\frac{4}{10}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$
d) $0,\overline{2} \cdot x^{\frac{1}{3}}$
e) $\frac{2}{3} \cdot x$

7) Si a, b, n y p son números reales positivos, entonces $\sqrt[b]{a^n} \cdot \sqrt[n]{p^b}$ es igual a **[PSU 2016]**

a) ap
b) $(ap)^{\frac{n^2+b^2}{nb}}$
c) $\sqrt[bn]{a^{n^2} \cdot p^{b^2}}$
d) $\sqrt[bn]{(ap)^{n+p}}$
e) Ninguna de las expresiones anteriores.

8) ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)? **[PSU 2014]**

I) $(\sqrt{3}+4)^2 = 19$
II) $\sqrt{\sqrt{5}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1} = 2$
III) $\dfrac{2\sqrt{50}+4\sqrt{18}}{\sqrt{8}} = 11$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo II y III
e) I, II y III

9) Si $\dfrac{p}{q} < 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)? **[PSU 2010]**

I) $\sqrt{p^2} + \sqrt{q^2} = |p| + |q|$
II) $\sqrt{p^2} + \sqrt{q^2} = p + q$
III) $\sqrt{p^2} + \sqrt{q^2} > 0$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y III
e) Solo II y III

10) Sea q una aproximación por exceso a la centésima de $\sqrt{2}$ y p una aproximación por defecto a la centésima de $\sqrt{2}$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)? **[PSU 2014]**

I) $p = q$
II) $\dfrac{p+q}{2} = \sqrt{2}$
III) $q = \sqrt{2} - k$, con k un número real positivo.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo II y III
e) Ninguna de ellas.

1.	B	2.	E	3.	D	4.	D	5.	E
6.	D	7.	C	8.	C	9.	D	10.	E

IV. Ejercicios tipo PAES

11) $\sqrt{9} + \sqrt[3]{-125} + \sqrt[4]{256} =$

a) -2
b) 2
c) -12
d) 12
e) 0

12) Al ordenar en forma creciente los números $x = 3\sqrt{2}$, $y = 4\sqrt{5}$ y $z = 2\sqrt{3}$, se obtiene

a) z, x, y
b) x, z, y
c) y, z, x
d) y, x, z
e) z, y, x

13) ¿Cuál de las siguientes alternativas da como resultado 14?

a) $\sqrt{36 + 64}$
b) $\dfrac{\sqrt{140}}{\sqrt{10}}$
c) $18\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$
d) $\sqrt{(-14)^2}$
e) $\sqrt{28}$

14) ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a un número racional?

a) $\sqrt[5]{16}$
b) $(\sqrt{3})^7$
c) $(5\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$
d) $(3\sqrt{2} + 1)^2$
e) $(\sqrt{48} - \sqrt{3})^2$

15) Al reducir la expresión $\sqrt[4]{9} + \sqrt[6]{27}$ se obtiene

a) 3
b) $2\sqrt{3}$
c) $\sqrt[10]{36}$
d) $\sqrt[12]{9^3 + 27^2}$
e) No se puede reducir.

16) $\dfrac{\sqrt[8]{5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7}}{\sqrt{5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7}} =$

a) 1
b) $\dfrac{1}{5}$
c) $\dfrac{1}{10}$
d) $\dfrac{1}{25}$
e) $\dfrac{1}{125}$

17) Si $\sqrt[3]{64} + \sqrt{4} = n$, entonces $n^{-\frac{1}{2}}$ es igual a

a) $\dfrac{1}{6}$
b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{64} + \sqrt{4}}$
c) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$
d) $-\dfrac{1}{3}$
e) $-\sqrt{6}$

18) Al racionalizar el denominador de la expresión $\dfrac{4}{4 + \sqrt{14}}$ se obtiene

a) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{14}}$
b) $8 - 2\sqrt{14}$
c) $\dfrac{8 + 2\sqrt{14}}{15}$
d) $\dfrac{1 - \sqrt{14}}{-13}$
e) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

19) Si a y b son números reales positivos, $\dfrac{ab}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$ es igual a

a) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
b) $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{a-b}$
c) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a-b}$
d) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a-b}$
e) $\dfrac{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{a-b}$

20) ¿Con cuál(es) de las siguientes condiciones se puede afirmar que el valor de $\dfrac{\sqrt{M}}{\sqrt{Q}}$ es 2, sabiendo que $Q \neq 0$?

I) M es el doble de Q.
II) Q > 30 y M y Q están en razón de $4:1$.
III) $\dfrac{\sqrt[4]{Q}}{\sqrt[4]{M}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y II
e) Solo II y III

21) $(\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{45}):\sqrt{5}$

a) 3
b) $3\sqrt{5}$
c) $\sqrt{11}$
d) 11
e) $11\sqrt{5}$

22) $\dfrac{2}{5-\sqrt{3}}$

a) $5+\sqrt{3}$
b) $\dfrac{10+\sqrt{3}}{22}$
c) $\dfrac{5+\sqrt{3}}{8}$
d) $\dfrac{5+\sqrt{3}}{11}$
e) Ninguno de los valores anteriores.

23) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{6}-2$
b) $\sqrt{3}-2$
c) $2-\sqrt{6}$
d) $2-\sqrt{3}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

24) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$
b) $\sqrt[3]{3}$
c) $\sqrt[3]{9}$
d) $3\sqrt[3]{3}$
e) Ninguno de los valores anteriores.

25) $\sqrt{\sqrt{50}+11\sqrt{2}}$

a) $4\sqrt{2}$
b) $4\cdot\sqrt{2}$
c) $16\cdot\sqrt[4]{2}$
d) $16\sqrt{2}$
e) $\sqrt[4]{50}+\sqrt[4]{242}$