



Guía N°8 (M1)

<< Probabilidades >>

NOMBRE: _____

I. Introducción

Muchas veces nos hemos topado con preguntas del tipo: “¿Qué tan probable es que ocurra un cierto resultado?” o “¿Qué tan probable es que si lanzo una moneda al aire obtengamos una cara o un sello?”.

Todas esas preguntas, y muchas más corresponden a una rama de la estadística conocida como **Probabilidad**, es decir, la asociación de una medida numérica a un cierto experimento, sin la necesidad de realizarlo, pero sabiendo, a priori, lo que este experimento nos puede entregar como resultado. Antes de definir el concepto mismo de una probabilidad, o cuán probable es que ocurra cierto suceso es necesario tener en cuenta las siguientes definiciones.

II. Probabilidades

Tipos de Experimentos

- **Experimento Determinístico:** Resultado predecible al repetir las mismas condiciones. Medir el tiempo de caída de un objeto de 2 kg desde cierta altura (siempre el mismo resultado).
- **Experimento Aleatorio:** Resultado impredecible antes de realizarlo. Lanzar una moneda (resultado: cara o sello, pero no sabemos cuál).

Espacio Muestral (E)

Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio:

- Lanzamiento de moneda: $E = \{\text{cara, sello}\}$
- Lanzamiento de dado: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Dos monedas: $E = \{(\text{cara, cara}), (\text{cara, sello}), (\text{sello, cara}), (\text{sello, sello})\}$

Eventos o Sucesos

Subconjuntos del espacio muestral:

Tipos Básicos

- **Suceso Imposible:** Nunca ocurre: Obtener 7 al lanzar un dado estándar.
- **Suceso Seguro:** Siempre ocurre: Sacar carta roja de baraja con solo corazones y diamantes.

Relaciones entre Sucesos

- **Mutualmente Excluyentes:** No pueden ocurrir simultáneamente: $A = \text{"Número par al lanzar dado"}$
 $B = \text{"Número impar al lanzar dado"}$
- **Independientes:** No se afectan entre sí Lanzar dado y moneda simultáneamente.
- **Dependientes:** La ocurrencia de uno afecta al otro Sacar dos cartas sin reposición de una baraja.

Probabilidad Clásica: Regla de Laplace

La probabilidad de un suceso A se calcula como:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Condiciones:

- Espacio muestral finito
- Todos los resultados igualmente probables

Ejemplo

Para el suceso $A = \text{"Obtener par"}$ al lanzar un dado:

- Casos favorables: $\{2, 4, 6\}$ (3 elementos)
- Casos totales: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (6 elementos)

La probabilidad de obtener un número par queda expresa por la siguiente expresión:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Sucesos Complementarios

En algunas situaciones nos van a preguntar por la probabilidad de que ocurra la negación de un suceso, en este caso calculamos la probabilidad de la afirmación del suceso y se lo restamos a la unidad:

- $A^c = \text{"No ocurre } A\text{"}$
- Relación fundamental:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

Ejemplo Avanzado

Problema:

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados NO se obtenga suma 7?

Solución:

1. Definimos:

- $A = \text{"Suma igual a 7"}$
- $A^c = \text{"Suma diferente de 7"}$

2. Casos favorables para A :

$$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \quad (6 \text{ combinaciones})$$

3. Casos totales (Principio de Multiplicación):

$$6 \times 6 = 36 \text{ posibles resultados}$$

4. Calculamos:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Finalmente, la probabilidad de no obtener 7 es igual a $\frac{5}{6}$

Sucesos Mutuamente Excluyentes

Dos sucesos A y B son **mutuamente excluyentes** cuando **no pueden ocurrir simultáneamente**. En este caso, la probabilidad de que ocurra A o B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Problema

¿Cuál es la probabilidad de sacar un **rey** o un **número** de una baraja inglesa?

- **Definimos los sucesos:**
 - $A = \text{"Sacar un rey"} \Rightarrow \text{Casos favorables: } 4 \text{ (1 rey por cada pinta)}$
 - $B = \text{"Sacar un número"} \Rightarrow \text{Casos favorables: } 40 \text{ (10 números por pinta } \times 4 \text{ pintas)}$

• **Total de cartas:** 52

• **Probabilidades:**

$$P(A) = \frac{4}{52} \quad \text{y} \quad P(B) = \frac{40}{52}$$

- **Como son mutuamente excluyentes** (una carta no puede ser rey y número a la vez):

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{40}{52} = \frac{44}{52} = \frac{11}{13}$$

Sucesos No Mutuamente Excluyentes

Dos sucesos A y B son **no excluyentes** cuando **pueden ocurrir simultáneamente**. En este caso, la fórmula incluye un término de corrección:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Problema:

¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolita con número **mayor que 15** o **múltiplo de 4** de una caja con 25 bolitas (1 al 25)?

- **Definimos los sucesos:**

- $A = \text{"Número} > 15" \Rightarrow \{16, 17, \dots, 25\}$ (10 casos)
- $B = \text{"Múltiplo de 4"} \Rightarrow \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$ (6 casos)
- $A \cap B = \text{"Número} > 15 \text{ y múltiplo de 4"} \Rightarrow \{16, 20, 24\}$ (3 casos)

- **Total de bolitas:** 25

- **Probabilidades:**

$$P(A) = \frac{10}{25}, \quad P(B) = \frac{6}{25}, \quad P(A \cap B) = \frac{3}{25}$$

- **Aplicamos la fórmula:**

$$P(A \cup B) = \frac{10}{25} + \frac{6}{25} - \frac{3}{25} = \frac{13}{25}$$

Sucesos Independientes

Dos sucesos A y B son **independientes** cuando la ocurrencia de uno **no afecta** la probabilidad del otro. En este caso, la probabilidad conjunta se calcula como:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Problema

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado estándar dos veces se obtenga:

- Un 5 en el primer lanzamiento (A)
- Un número par en el segundo lanzamiento (B)

Solución

1. **Definir los sucesos:**

- $A = \text{"Obtener 5 en primer lanzamiento"}$
- $B = \text{"Obtener par en segundo lanzamiento"}$

2. **Verificar independencia:** Los sucesos son independientes porque el resultado del primer lanzamiento no influye en el segundo.

3. **Calcular probabilidades individuales:**

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (\text{Los pares son } \{2, 4, 6\})$$

4. **Aplicar regla de multiplicación:**

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

III. Ejercicios de Admisiones pasadas

1) La tabla adjunta está incompleta y muestra el número de piezas de géneros de distintos tipos A₁ a A₈. Si se elige una de estas piezas, al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea del tipo A₆ o A₈? **[PSU 2013]**

- a) 0, 2
- b) 0, 3
- c) 0, 34
- d) 0, 65
- e) No se puede determinar

A _i	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
A ₁	4		0,08
A ₂	4		
A ₃		16	0,16
A ₄	7		0,14
A ₅	5	28	
A ₆		38	
A ₇	7	45	
A ₈			

2) En un experimento se lanza una moneda, si sale sello, se lanza un dado y si sale cara, la moneda se lanza por segunda vez, terminándose el experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que se lance el dado? **[PSU 2013]**

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{8}$
- c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$
- d) $\frac{1}{6}$
- e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

3) En un estante se tienen un total de 13 libros de los cuales solo 8 son de matemática. Si la mitad de los libros de matemáticas son rojos, ¿cuál es la probabilidad de que al elegir un libro del estante, éste sea rojo y de matemáticas? **[PSU 2013]**

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{13}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{4}{13}$
- e) $\frac{12}{13}$

4) Un grupo de veinte personas se reunió a comer en un restaurante. Doce comieron mariscos y ocho comieron carne. Al día siguiente, trece de ellos amanecieron enfermos, de los cuales nueve consumieron mariscos. Si de los enfermos se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hubiese comido carne? **[PSU 2014]**

- a) $\frac{4}{20}$
- b) $\frac{4}{13}$
- c) $\frac{4}{8}$
- d) $\frac{9}{13}$
- e) $\frac{4}{9}$

5) Una moneda está cargada de tal forma que es cuatro veces más probable que se obtenga una cara que un sello. Si se lanza dos veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos sellos? **[PSU 2012]**

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{25}$
- c) $\frac{1}{16}$
- d) $\frac{1}{5}$
- e) Ninguna de las anteriores

6) En una caja hay un total de 3 bolas blancas y 6 bolas rojas, en otra caja hay en total 5 bolas blancas y 7 rojas y todas las bolas de las cajas son del mismo tipo. Si un experimento consiste en sacar, al azar, una bola de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas? [PSU 2013]

- a) $\frac{3}{9} \cdot \frac{5}{12}$
- b) $\frac{8}{21} \cdot \frac{7}{20}$
- c) $\frac{8}{21} + \frac{7}{20}$
- d) $\frac{3}{9} + \frac{5}{12}$
- e) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$

7) Si $\mathbb{P}$ es una función de probabilidad de un experimento aleatorio donde se definen dos sucesos A y B, con $\mathbb{P}(A) \neq 0$ y $\mathbb{P}(B) \neq 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)? : [PSU 2014]

- I) Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $\mathbb{P}(A|B)=0$.
- II) Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $\mathbb{P}(B|A)=\mathbb{P}(B)$
- III) Si A y B son independientes, entonces $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(B|A)$

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) Solo III
- d) Solo I y III
- e) Solo II y III

8) Se tienen tres cajas de dos bolitas, una de color azul y otra de color blanco, en cada una de ellas y todas las bolitas son del mismo tipo. Si se extrae al azar una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que éstas sean dos azules y una blanca? [PSU 2014]

- a) 2/9
- b) 3/8
- c) 1/4
- d) 1/8
- e) 3/4

9) En el triángulo de Pascal de la figura se puede inferir el número total de los posibles resultados que se obtienen al lanzar una moneda hasta seis veces, de forma aleatoria. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)? [PSU 2010]

- I) De la fila "1-2-1" se deduce que, si la moneda se lanza dos veces, teóricamente solo en dos de los posibles resultados se obtiene una cara y un sello.
- II) De la fila "1-3-3-1" se deduce que, si la moneda se lanza tres veces, teóricamente solo se pueden obtener ocho posibles resultados distintos.
- III) De la fila "1-6-15-20-15-6-1" se deduce que, si la moneda se lanza seis veces, teóricamente en quince de los resultados posibles se obtiene cuatro cara y dos sellos.

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) Solo I y II
- d) Solo I y III
- e) I, II y III

				1					
				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
	1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			

10) Se lanza una moneda y dos dados comunes, una a continuación del otro. ¿Cuál es la probabilidad de que en la moneda salga cara y de que el número del primer dado sea menor que el número del segundo? [PSU 2015]

- a) 1/4
- b) 33/36
- c) 21/72
- d) 15/72
- e) 1/24

1.	B	2.	A	3.	D	4.	B	5.	B
6.	A	7.	A	8.	B	9.	E	10.	D

IV. Ejercicios tipo PAES

11) Se lanzan tres dados normales. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dígitos obtenidos sea igual a 5?

- a) $\frac{12}{216}$
- b) $\frac{6}{216}$
- c) $\frac{1}{72}$
- d) $\frac{1}{108}$
- e) $\frac{1}{216}$

12) Una bolsa contiene fichas, de igual peso y tamaño, 3 rojas, 4 amarillas y 8 de color naranja. Si se elige al azar una ficha. ¿Cuál es la probabilidad de que ella no sea de color naranja?

- a) $\frac{1}{15}$
- b) $\frac{2}{15}$
- c) $\frac{7}{15}$
- d) $\frac{8}{15}$
- e) $\frac{1}{2}$

13) Se tiene una bolsa de *n* fichas de dos colores distintos, pero iguales de peso y tamaño. Considerando que hay al menos 4 fichas y que la mitad de ellas son de un mismo color, entonces si se sacan dos fichas, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

- a) $\frac{n}{2}$
- b) $\frac{n - 2}{4(n - 1)}$
- c) $\frac{n}{2(n - 1)}$
- d) $\frac{n}{4(n - 1)}$
- e) $\frac{1}{4}$

14) Se lanza una moneda tres veces consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de que en dos oportunidades se obtenga cara?

- a) $\frac{1}{8}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{3}{8}$
- d) $\frac{1}{4}$
- e) $\frac{3}{4}$

15) Se lanzan tres dados normales. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera vez salga 1, la segunda vez salga un 2 y la tercera vez salga un 3?

- a) $\frac{12}{216}$
- b) $\frac{6}{216}$
- c) $\frac{1}{72}$
- d) $\frac{1}{108}$
- e) $\frac{1}{216}$

16) En el experimento aleatorio "lanzar dos dados normales" se cuenta con 2 dados: uno de color negro y otro de color blanco. Se definen sobre el espacio muestral los sucesos A como "la suma del puntaje obtenido es 9" y B "en el dado blanco se obtiene un número par". ¿Cuál es la probabilidad de ocurran simultáneamente los sucesos A y B?

- a) $\frac{1}{6}$
- b) $\frac{1}{36}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $\frac{1}{18}$
- e) $\frac{1}{9}$

17) Un dado está cargado de tal manera que al lanzarlo la probabilidad de que salga 1 es cuatro veces la probabilidad de que salga cualquier otro número. Entonces, si el dado se lanzan 2 veces, ¿cuál es la probabilidad de que ambas veces salga 1?

- a) $\frac{4}{81}$
- b) $\frac{16}{81}$
- c) $\frac{5}{81}$
- d) $\frac{1}{16}$
- e) $\frac{2}{9}$

18) Un dado de 6 caras está especialmente arreglado para que la probabilidad de que aparezca un número par sea el doble de que aparezca u número impar. Con esta condición especial, si se lanza 2 veces el dado, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea 4?

- a) $\frac{5}{81}$
- b) $\frac{1}{12}$
- c) $\frac{6}{81}$
- d) $\frac{1}{9}$
- e) $\frac{2}{9}$

19) Se lanzan cinco monedas normales. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 sellos?

- a) $\frac{5}{32}$
- b) $\frac{3}{5}$
- c) $\frac{3}{32}$
- d) $\frac{10}{32}$
- e) $\frac{1}{3}$

20) En un grupo de 200 personas, 150 van de vacaciones fuera de la capital, mientras que el resto se queda en la capital. de estos últimos, 30 suelen ir a la piscina para pasar el calor. Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que, sabiendo que se queda en la capital, vaya frecuentemente a la piscina en vacaciones?

- a) $\frac{30}{200}$
- b) $\frac{1}{5}$
- c) $\frac{2}{5}$
- d) $\frac{3}{5}$
- e) $\frac{1}{30}$

21) Se tiene una bolsa con bolitas numeradas del 1 al 24, todas de igual peso y tamaño. Si se extrae una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 4 o múltiplo de 5?

- a) $\frac{7}{24}$
- b) $\frac{8}{24}$
- c) $\frac{9}{24}$
- d) $\frac{10}{24}$
- e) Ninguna de las probabilidades anteriores.

22) En un cajón hay 5 corbatas azules, 3 corbatas rojas, 4 pañuelos azules y 6 pañuelos rojos. Si se extrae al azar una prenda del cajón, ¿cuál es la probabilidad de que sea o una prenda roja, o bien una corbata de cualquier color?

- a) $\frac{1}{6}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) $\frac{7}{9}$
- e) $\frac{17}{18}$

23) En una caja hay cinco tarjetas de igual forma y tamaño, numeradas del 1 al 5. Si se escogen al azar dos tarjetas, una tras otra y con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea 7 o 9?

- a) $\frac{1}{25}$
- b) $\frac{3}{25}$
- c) $\frac{2}{9}$
- d) $\frac{6}{25}$
- e) $\frac{2}{5}$

24) En el casillero de un profesor solo hay lápices de dos colores: 8 lápices rojos y 22 lápices azules. De los lápices rojos, 6 son de pasta y el resto son de mina, y de los lápices azules, 17 son de mina y el resto son de pasta. Si para corregir una prueba necesita un lápiz que sea rojo de cualquier tipo, o de pasta de cualquier color, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar un lápiz al azar del casillero, este le sirva para corregir la prueba?

- a) $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{13}{30}$
- c) $\frac{19}{30}$
- d) $\frac{23}{30}$
- e) $\frac{5}{6}$

25) En una canasta hay fichas que tienen escrita una letra entre las vocales, A, E, I y O, todas con igual forma y tamaño. Si la razón entre las fichas que tienen escritas las vocales A y E es 2 : 3, la razón entre las fichas que tienen escritas las vocales A y O es 3 : 2, y la razón entre las que tienen escritas las vocales I y E es 1 : 3, entonces ¿cuál es la probabilidad de que al extraer al azar una ficha esta tenga escrita la vocal A o la vocal O?

- a) $\frac{5}{9}$
- b) $\frac{10}{23}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $\frac{5}{11}$
- e) Indeterminable con los datos dados.